SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

TRIGONOMETRÍA.

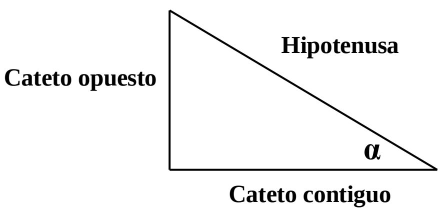
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS. TEOREMAS DEL SENO Y DEL COSENO. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS. DEMOSTRAR Y SIMPLIFICAR EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

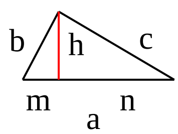
1. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS.

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}}$$

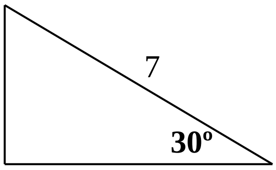
$$\text{tag}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}$$



Teorema del seno. $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$	Teorema del coseno. $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C$	 Triángulo rectángulo	T. de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$ $b^2 = m^2 + h^2$ $c^2 = n^2 + h^2$ T.del cateto. $b^2 = m.a$ $c^2 = n.a$ T. de la altura. $h^2 = m.n$

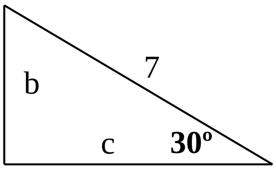
a. Triángulos rectángulos.

1. a. Hallar los catetos del siguiente triángulo.



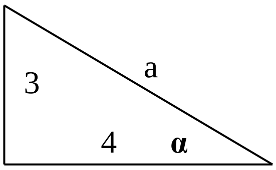
b. Resolver un triángulo rectángulo de cateto 3 y 4 cm.

VER VÍDEO https://youtu.be/2CMyZoXIzAY



$$\mathrm{sen}30 = \frac{b}{7} \rightarrow b = 7.\mathrm{sen}30 = \mathbf{3'5}$$

$$\cos 30 = \frac{c}{7} \rightarrow c = 7.\cos 30 = \mathbf{6'06}$$



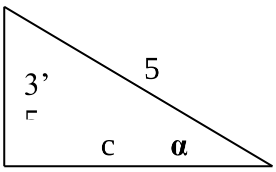
$$\tan\alpha = \frac{3}{4} \rightarrow \alpha = \mathrm{shift}\tan\frac{3}{4} = \mathbf{36'87º}$$

$$\text{Pitágoras: } a = \sqrt{b^2 + c^2} = \mathbf{5\ cm}.$$

2. a. Una escalera de 5 m. se apoya en la pared a 3'5 m. de altura. ¿A qué distancia de la pared se apoya? ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo?

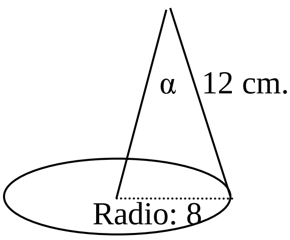
b. Las patas de un compás miden 12 cm. ¿Qué ángulo forman si dibujamos una circunferencia de 16 cm. de diámetro?

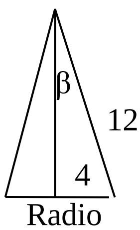
VER VÍDEO https://youtu.be/aD4qf9TDE1M



$$\mathrm{sen}\alpha = \frac{3'5}{5} \rightarrow \alpha = \mathrm{shift}\ \mathrm{sen}\frac{3'5}{5} = \mathbf{44'43º}$$

$$\text{Pitágoras: } c = \sqrt{a^2 - b^2} = \mathbf{3'57\ cm}.$$





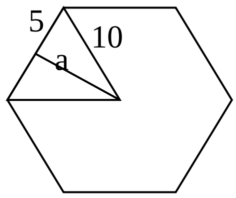
$$\mathrm{sen}\beta = \frac{4}{12} \rightarrow \beta = 19'47º$$

$$\alpha = 2\beta = \mathbf{38'94º}$$

3. a. Calcular el área de un hexágono regular de 10 cm. de lado.

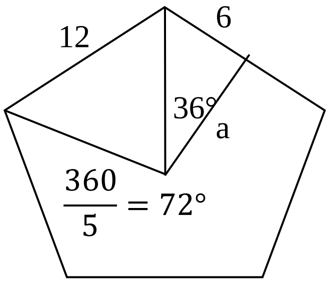
b. Calcular el área de un pentágono regular de 12 cm. de lado.

VER VÍDEO https://youtu.be/QnVepyGufPs



$$\text{Pitágoras: } a = \sqrt{10^2 - 5^2} = \mathbf{8'66\ cm}.$$

$$\text{área} = \frac{\text{perimetro. apotema}}{2} = \frac{6.10.8'66}{2} = \mathbf{259'8cm^2}.$$



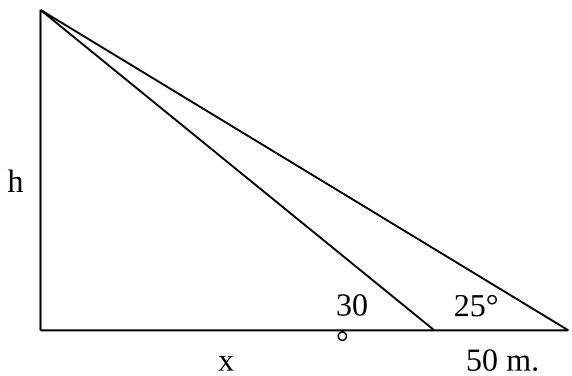
$$\tan 36 = \frac{6}{a} \rightarrow a = \frac{6}{\tan 36} = 8'26\text{cm}.$$

$$\text{área} = \frac{\text{perimetro. apotema}}{2} = \frac{5.12.8'26}{2} = \mathbf{247'8cm^2}.$$

Estrategia de la altura.

4. Vemos un poste bajo un ángulo de 30°. Si nos alejamos 50 m. la veremos bajo un ángulo de 25°. Calcular la altura del poste.

VER VÍDEO https://youtu.be/XaZ1ldQWRjg



$$\begin{cases} \tan 30 = \frac{h}{x} \rightarrow h = x.\tan 30 \\ \tan 25 = \frac{h}{50+x} \rightarrow h = (50+x).\tan 25 \end{cases}$$

$$x.\tan 30 = (50 + x).\tan 25$$

$$x.\tan 30 = 50.\tan 25 + x.\tan 25$$

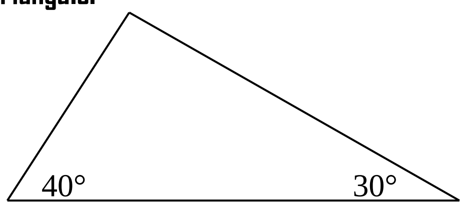
$$x\tan 30 - x.\tan 25 = 50.\tan 25$$

$$x.(\tan 30 - \tan 25) = 50.\tan 25$$

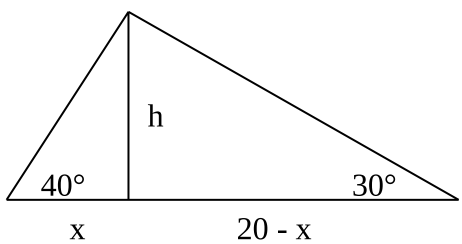
$$x = \frac{50.\tan 25}{\tan 30 - \tan 25} = \mathbf{210\ m}.$$

$$h = 210 \cdot tg\ 30 = \mathbf{121\ m.}$$

5. Hallar el área del siguiente triángulo.



VER VÍDEO https://youtu.be/8XooWxK9aFk



$$\begin{cases} \tan 30 = \frac{h}{20-x} \rightarrow h = (20-x).\tan 30 \\ \tan 40 = \frac{h}{x} \rightarrow h = x.\tan 40 \end{cases}$$

$$(20 - x).\tan 30 = x.\tan 40$$

$$20.\tan 30 - x.\tan 30 = x.\tan 40$$

$$20.\tan 30 = x.\tan 40 + x.\tan 30$$

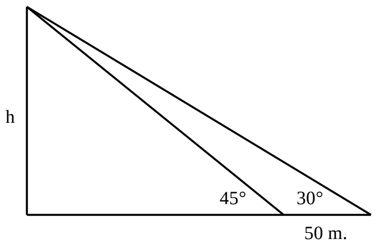
$$20.\tan 30 = x.(\tan 40 + \tan 30)$$
$$x = \frac{20.\tan 30}{\tan 40 + \tan 30} = 8'15 \text{ cm.}$$
$$h = x.\tan 40 = 6'84 \text{ cm.}$$
área = **68'4 cm²**.

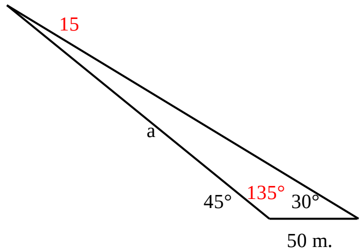
b. Resolución de todo tipo de triángulos.

6. a. Calcula la altura de una torre sabiendo la visual trazada desde un punto A, situado en el suelo, al punto más alto de la torre, forma con la horizontal un ángulo de 45° y si la misma medida se hace desde un punto B, entonces el ángulo es 30°. A, B y el pie de la torre están alineados y la distancia entre A y B es de 50 m.

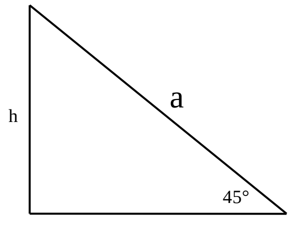
b. Desea saber la altura de un edificio de base inaccesible A. Por esta razón se coloca un teodolito en los puntos C y D. (A, C y D están en el suelo y no alineados). El ángulo de elevación del edificio medido desde C, vale 60° y el ángulo ACD = 45°. Desde D se mide el ánguloADC = 60°. La distancia entre C y D es de 10 m.

VER VÍDEO https://youtu.be/Pv5hpshDQ7U

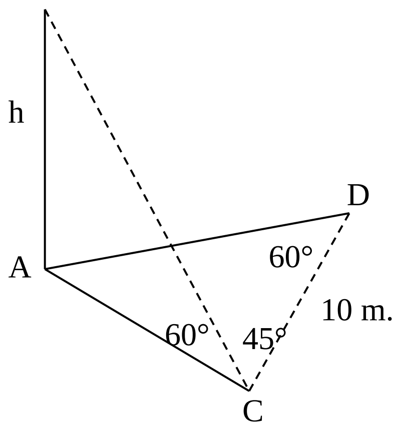


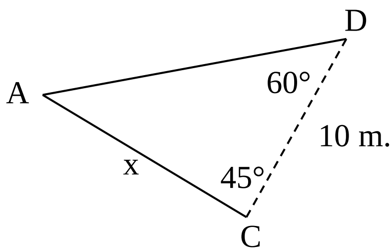


$$\frac{a}{\text{sen } 30} = \frac{50}{\text{sen } 15} \rightarrow$$
$$a = 96{,}59 \text{ m.}$$



$$\frac{96{,}59}{\text{sen } 90} = \frac{h}{\text{sen } 45} \rightarrow$$
$$a = 68{,}3 \text{ m.}$$

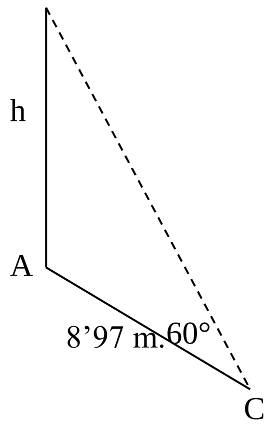




El $\widehat{A}$ vale 180 – C – D = 75°

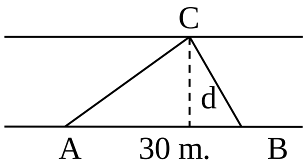
Hallamos x: $\frac{10}{\text{sen}75} = \frac{x}{\text{sen}60}$

$$x = 8'97 \text{m}$$



$$\tan 60 = \frac{h}{8'97}$$
$$h = \mathbf{15'53.m}$$

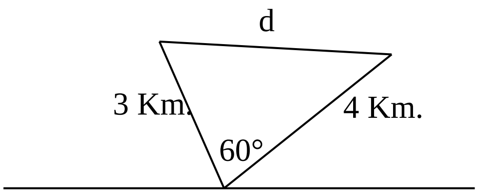
7. Un río tiene dos orillas paralelas. Desde los puntos A y B situados en la misma orilla se observa un punto C en el lado opuesto. Si trazamos una visual de C perpendicular a la orilla opuesta, está entre A y B. Las visuales de A a C y B a C forman con la dirección de la orilla ángulos de 45º y 60º respectivamente. Calcular la anchura del río sabiendo que de A a B hay 30 m.
VER VÍDEO https://youtu.be/sgHVbG81LOo



$$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 75^\circ$$
$$\frac{30}{\text{sen}75} = \frac{AC}{\text{sen}60}$$
$$AC = 26'9 \text{ cm}$$

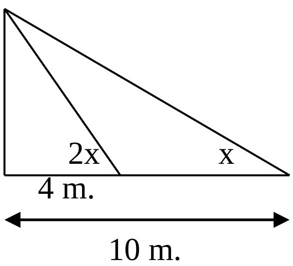
$$\text{sen}45 = \frac{d}{26'9}$$
$$d = 19 \text{ m.}$$

8. Dos aviones salen al mismo tiempo del aeropuerto en diferentes direcciones, formando éstas un ángulo de 60º, suponiendo que van en línea recta y han recorrido 3 km y 4 km respectivamente. ¿Qué distancia los separan?
VER VÍDEO https://youtu.be/GGX6zWPYSnw



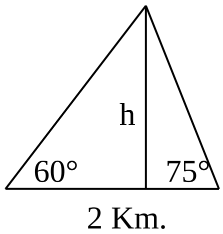
Aplicando el teorema del coseno:
$$d^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot \cos 60$$
$$d = 3'6 \text{ Km.}$$

9. A 10 m. del pie de una estatua, se ve bajo un ángulo X y a 4 m bajo de un ángulo 2x calcula la altura de la estatua.
VER VÍDEO https://youtu.be/QORpM-gJdXU



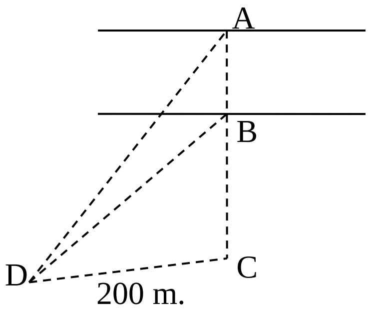
$$\begin{cases} \tan x = \dfrac{h}{10} \\ \tan 2x = \dfrac{h}{4} \rightarrow \dfrac{2.\overbrace{\tan x}^{\frac{h}{10}}}{1 - \tan^2 x} = \dfrac{h}{4} \end{cases} \rightarrow \frac{2.\frac{h}{10}}{1 - \left(\frac{h}{10}\right)^2} = \frac{h}{4} \rightarrow h = 4'47 \text{m.}$$

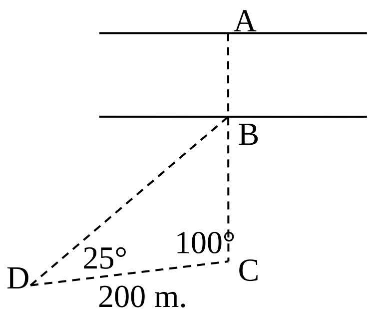
10. Dos personas distantes entre sí 2 km midieron al mismo tiempo la altura de un avión, que se encuentra en el plano vertical que contiene a las dos personas y se encuentra entre ellas. Los ángulos de elevación del avión medidos por estas personas son 60º y 75º respectivamente. Calcula la altura del avión.
VER VÍDEO https://youtu.be/DsJgyOqlZuE



Como el problema 6. H = 2'366 Km.

11. Queremos calcular la anchura de un río. Para ello, elegimos un punto C alineado con dos puntos A y B que determinan la anchura del río. A continuación, se determina otro punto D, de modo que el ángulo DCA = 100° (B, C y D están en el mismo lado del río). A continuación, se muestran las siguientes medidas: distancia CD a 200 m. y ángulos BDC = 25° 15' y ADC = 40°.
VER VÍDEO https://youtu.be/NoB_rrYlRow

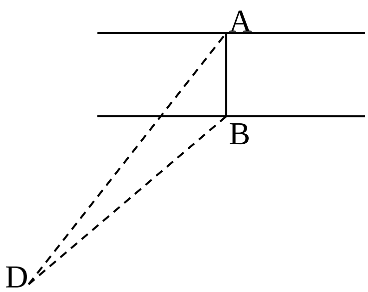




Ángulo DBC = 54° 25'

$$\frac{DB}{\text{sen } 100} = \frac{200}{\text{sen } 54°25'}$$

DB = 241'18



ADB = ADC − BDC;

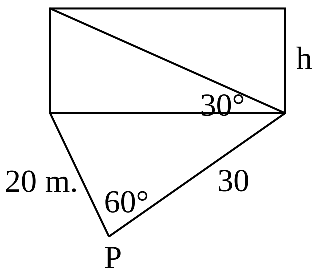
ADB = 14° 45'

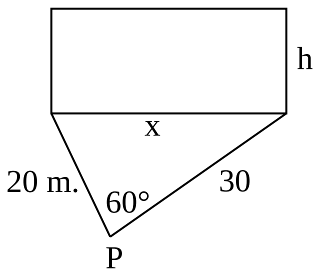
BAD = 180 − ADC − DCA = 40°

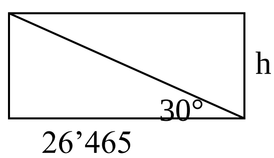
$$\frac{AB}{\text{sen } 14°45'} = \frac{241'18}{\text{sen} 40}$$

AB = 95'53 m.

12. La cara visible de un edificio tiene una forma rectangular, la diagonal del rectángulo forma con la base de un ángulo de 30°. Situados en el suelo, en un punto P, el ángulo bajo el cual se ve el edificio es de 60º y las distancias desde el punto P hasta los extremos de la base son de 20 m. y 30 m. respectivamente. Calcula la altura del edificio.
VER VÍDEO https://youtu.be/sIhVURCEgZ4







$$\tan 30 = \frac{h}{26'465};\ H = 15'28\text{m.}$$

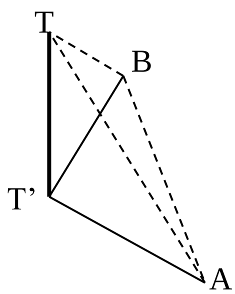
Aplicando el teorema del coseno:

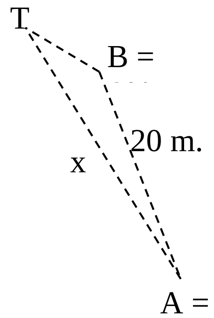
$$X^2 = 30^2 + 20^2 - 2.30.20.\cos 60$$

$$X = 26'465 \text{ m.}$$

13. Calcula la altura del punto más alto T de una torre de base inaccesible T' si desde los puntos A y B no alineados con T' se miden los siguientes ángulos: T'AT = 30º TAB = 75º; TBA = 60º. La distancia de A a B es de 20 m.

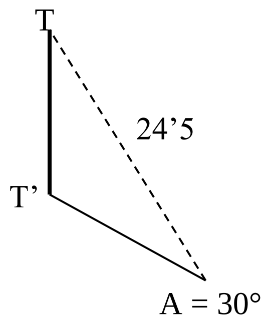
VER VÍDEO https://youtu.be/EH7JN9PFmVI





$$T = 180 - 60 - 75 = 45°$$

$$\frac{20}{\text{sen}45} = \frac{x}{\text{sen}60}\ ;\ X = 24'5 \text{ m.}$$

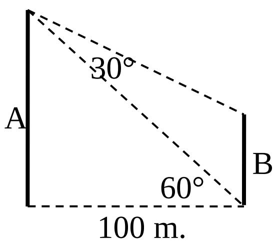


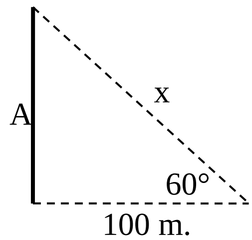
$$\text{sen}30 = \frac{h}{24'5}$$

$$h = 12'25\text{m.}$$

14. Desde el punto más alto de un edificio A se ve otro edificio B, de arriba abajo, bajo un ángulo de 30º y desde el pie de B se ve el edificio A, también de arriba a abajo, bajo un ángulo de 60º. Si la distancia entre los dos edificios es de 100 m. Calcula la altura de cada uno de ellos.

VER VÍDEO https://youtu.be/DkDC4ptHtDA



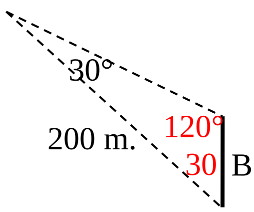


$$\tan 60 = \frac{A}{100}$$

$$A = 173'2 \text{ m.}$$

$$\cos 60 = \frac{100}{x}$$

$$x = 200 \text{ m.}$$



$$\frac{B}{\text{sen}30} = \frac{200}{\text{sen}120}$$

$$B = 115'5 \text{ m.}$$

15. Dos barcos salen del mismo puerto al mismo tiempo con direcciones que forman 45º. Si uno lleva una velocidad de 18 km/h y el otro 20 km/h. Cuánto tiempo tardarán hasta separarse 60 km. 4 h 5 min. 35 s.

VER VÍDEO https://youtu.be/Zj5Xb_F4QrA

16. Un cono se encuentra con su base en el suelo, siendo su generatriz de 30 m. y radio de la base de 15 m. A 25 m. del centro de la base y desde el suelo se lanza un proyectil contra el cono, con un ángulo de elevación de 45°, golpeando en un punto que se encuentra en el plano que contiene el punto de lanzamiento y la altura del cono. Calcula la altura del punto de impacto. 23,66 m.
VER VÍDEO https://youtu.be/BXEb2mIk1aA

17. Dos puntos A y B, separados por 50 m., equidisten del pie P de una torre de 100 m de altura. Desde P se ve el segmento AB bajo un ángulo de 30°. Calcula la distancia entre el punto más alto de la torre y el punto A. 139 m.
VER VÍDEO https://youtu.be/EtSs7FEiD0Q

18. Un avión vuela a una velocidad constante de 300 km/h siguiendo una trayectoria paralela al suelo. Sea P la posición del avión en un momento determinado, Q la posición en 6 s. y R después de 1 minuto. Y sea O la proyección de P sobre el suelo. Se sabe que POQ = x y POR = 2x. Calcula la altura del avión.
VER VÍDEO https://youtu.be/mLdULiwpNgs

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

Ecuación fundamental

$$\mathbf{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha \quad\Big|\quad \text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad\Big|\quad 1 + \text{tag}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad\Big|\quad 1 + \text{cotag}^2\alpha = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha}$$

19. **a. Representa un ángulo del tercer cuadrante cuyo seno sea $\frac{-3}{4}$.**
b. Representa un ángulo del segundo cuadrante cuyo coseno sea − 0,8.
c. Representa un ángulo del primer cuadrante cuya tangente valga 2.
VER VÍDEO https://youtu.be/6Sj0mTnpFpY

20.

a. $\mathbf{Si\ sen\alpha = \frac{1}{2}\ y\ \alpha \in II}$; **hallar cos α y tg α**

b. $\mathbf{Si\ cos\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}\ y\ \alpha \in III}$; **hallar sen α y tg α**

c. $\mathbf{Si\ tag\alpha = \sqrt{3}\ y\ \alpha \in I}$; **hallar sen α y cos α**

VER VÍDEO https://youtu.be/LXx7ftcw4jM

a.

$\text{sen}^2x + \cos^2x = 1 \to 1/4 + \cos^2x = 1 \to \cos^2x = 3/4 \to \cos x = -\sqrt{\frac{3}{4}}$; negativo pues en el segundo cuadrante el cos es negativo.

$$\tan x = \frac{\text{sen}x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b.

$\text{sen}^2x + \cos^2x = 1 \to \text{sen}^2x + 1/2 = 1 \to \text{sen}^2x = 1/2 \to \text{sen}x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$; negativo pues en el cuarto tercer cuadrante el sen es negativo.

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

c.

$$1 + \operatorname{tag}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \to 1 + \sqrt{3}^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \to \cos^2\alpha = \frac{1}{4} \to \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} \to \operatorname{sen}x = \cos x \cdot \tan x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

21. Sabiendo que sen 15º= 0,26, calcular:

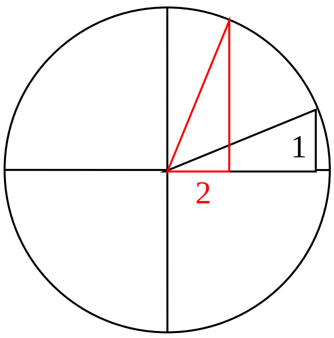
- **a. cos 75º.**
- **b. sen 105º.**
- **c. tan 165º.**
- **d. sen 195º**
- **e. cos 255º**
- **f. tan 285º**
- **g. sen 345º**

VER VÍDEO https://youtu.be/qNdI7xp5hiM

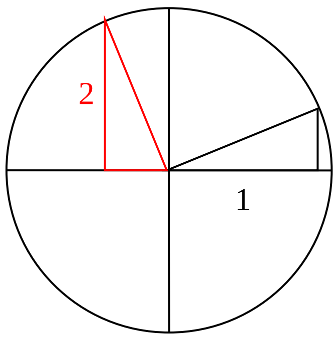
$$\operatorname{sen}^2x + \cos^2x = 1 \to 0{,}26^2 + \cos^2x = 1 \to \cos^2x = 0{,}93 \to \cos x = 0{,}97$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = \frac{0{,}26}{0{,}97} = 0{,}27$$

$$a.\ \underbrace{\cos 75°}_{2} = \underbrace{\operatorname{sen}15°}_{1} = 0{,}26$$



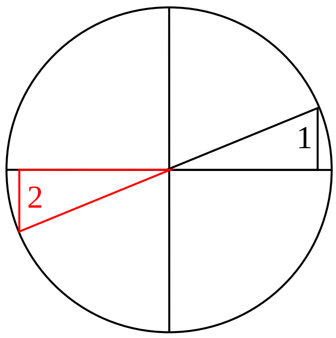
$$b.\ \underbrace{\operatorname{sen}105°}_{2} = \underbrace{\cos 15°}_{1} = 0{,}97$$

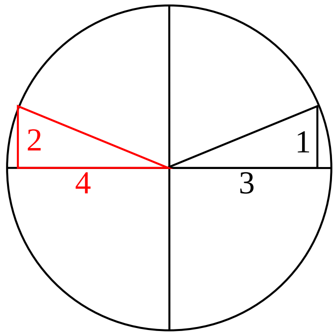


$$c.\ \tan 165° = \frac{\overbrace{\operatorname{sen}165°}^{2}}{\underbrace{\cos 165°}_{4}} = \frac{\overbrace{\operatorname{sen}15°}^{1}}{\underbrace{-\cos 15°}_{3}} =$$

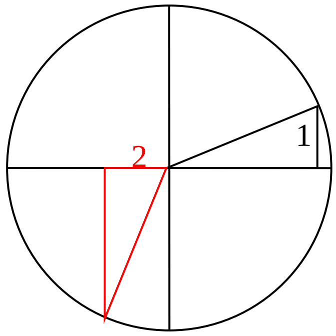
$$= -0{,}27$$

$$d.\ \underbrace{\operatorname{sen}195°}_{2} = \underbrace{-\operatorname{sen}15°}_{1} = -0{,}26$$

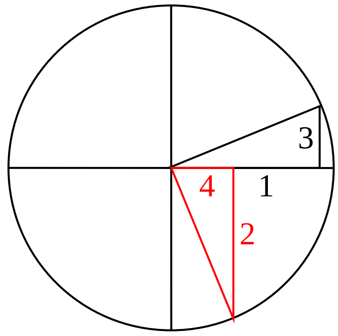




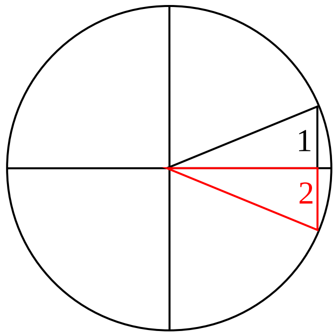
e. $\underbrace{\cos 255°}_{2} = \underbrace{-\text{sen}15°}_{1} = -0{,}26$



f. $\tan 285° = \dfrac{\overbrace{\text{sen}285°}^{2}}{\underbrace{\cos 285°}_{4}} = \dfrac{\overbrace{-\cos 15}^{1}}{\underbrace{\text{sen}15}_{3}} = -3{,}7$



g. $\underbrace{\text{sen}345°}_{2} = \underbrace{-\text{sen}15°}_{1} = -0{,}26$



22. Sabiendo que senx = 0'8 y que x está en el II cuadrante, calcular:

- **a. cosx**
- **b. tanx**
- **c. sen(90 + x)**
- **d. cos(180 – x)**
- **e. tan(270 + x)**

VER VÍDEO https://youtu.be/KZS4hdmOK2Q

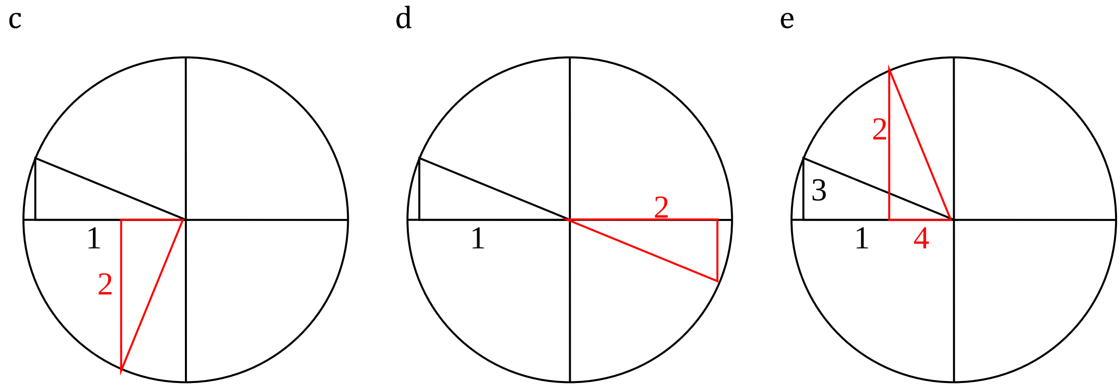
a. $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1 \rightarrow 0{,}8^2 + \cos^2x = 1 \rightarrow \cos^2x = 0{,}36 \rightarrow \cos x = -0{,}6$; negativo pues en el segundo cuadrante el cos es negativo.

$$b.\ \tan x = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = \frac{0{,}8}{-0{,}6} = \frac{-4}{3}$$

$$c.\ \overbrace{\operatorname{sen}(90+x)}^{2} = \overbrace{\cos x}^{1} = -0{,}6$$

$$d.\ \overbrace{\cos(180-x)}^{2} = -\overbrace{\cos x}^{1} = 0{,}6$$

$$e.\ \tan(270+x) = \frac{\overbrace{\operatorname{sen}(270+x)}^{2}}{\underbrace{\cos(270+x)}_{4}} = \frac{-\overbrace{\cos x}^{1}}{-\underbrace{\operatorname{sen}x}_{3}} = \frac{-3}{4}$$



23. Sabiendo que sen α = 3/5 y que α se encuentra en el 2º cuadrante, calcular:

a. tan 3α

b. cos α + 3tan α – cos 2α

VER VÍDEO https://youtu.be/KJd1jsK3ESE

24. Sabiendo que sen a = 3/5 y cos a < 0 y cos b = - 1/4 y 180º < b < 270º hallar: Sen(a – b), tan2a y tan a/2

VER VÍDEO https://youtu.be/DhudcCeKX2U

25. Si tan 2x =$\frac{1}{2}$, calcular x, tan x y tan 4x

VER VIDEO https://youtu.be/VXIQf67j69s

$$\tan 2x = \frac{1}{2} \to \begin{cases} 2x = 26'57º \to x = 13'28º \\ 2x = 206'57º \to x = 103'28º \end{cases}$$

$$\tan 2x = \frac{1}{2} \to \frac{2.\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{1}{2} \to 4.\tan x = 1 - \tan^2 x \to \tan^2 x + 4.\tan x - 1 = 0$$

$$\to \tan x = -2 \pm \sqrt{5}$$

$$\tan 4x = \frac{2.\tan 2x}{1-\tan^2 2x} = \frac{2.\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$$

26. Sabiendo que sen x = - 2/5, siendo π < x < 3π/2, calcula tan 2α y tan 3x

VER VÍDEO https://youtu.be/hhNMTK4BgvQ

27. Si sen x = 0'8 y x ∈ II, calcular:

a) cos x y tan x.

b) sen 2x

c) cos $\frac{x}{2}$

d) sen (π + x)

VER VIDEO https://youtu.be/4iDRj_1tJwc

a) Sustituyendo sen x = 0'8 en la ecuación $sen^2x + cos^2x = 1 \rightarrow 0'64 + cos^2x = 1 \rightarrow$
cos x = ± 0'6. Como el ángulo x se encuentra en el segundo cuadrante tomaremos cos x= – 0'6.

$$\tan x = \frac{\text{sen x}}{\cos x} = \frac{0'8}{-0'6} = -\frac{4}{3}$$

b) sen 2x = 2.sen x.cos x = 2.0'8.(– 0'6) = – 0'96

$$\text{c) } \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1-0'6}{2}} = \sqrt{0'2}$$

Debemos elegir el signo. X ∈ II → 90 ≤ x ≤ 180 → 45 ≤ x/2 ≤ 90 → x/2 ∈ I, signo +

$$\text{d) sen } (\pi + x) = \underbrace{\text{sen } \pi}_{0}.\cos x + \text{sen x}.\underbrace{\cos \pi}_{-1} = -\text{sen x} = -0'8$$

28. Si tan x = 2 y x ∈ I, calcular:

a) sen x y cos x.

b) tan 2x

c) cotan (x – π)

d) cos $\frac{x}{2}$

VER VIDEO https://youtu.be/HnxoEK0FG6o

$$\text{Si } \tan x = 2 \rightarrow \frac{\text{sen x}}{\cos x} = 2 \rightarrow \text{sen x} = 2.\cos x \rightarrow (2.\cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \rightarrow$$

$$5.\cos^2 x = 1 \rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5} \overset{\substack{x\in I \\ \cos x>0}}{\Rightarrow} \cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{sen x} = 2.\cos x = 2.\frac{\sqrt{5}}{5}$$

29. Sabiendo que tanx = 4, donde π < x < 3π/2, calcular sen$\left(\frac{x}{2}\right)$

VER VÍDEO https://youtu.be/RrusCGpomGU

30. Si sen 12° = 0,2, calcula tg 66°. Si además sabemos que sen 54° = 0,8, calcula sen 66° y cos 66°.

$$\text{sen}^2 12° + \cos^2 12° = 1;\; 0{,}2^2 + \cos^2 12° = 1; \cos 12° = 0{,}98; \text{tag } 12° = \frac{0{,}2}{0{,}98} = 0{,}2$$

$$\text{sen}24° = \text{sen}(2\cdot 12°) = 2\cdot \text{sen}12°\cdot \cos 12° = 0{,}39$$

$$\cos 24° = \cos^2 12° - \text{sen}^2 12° = 0{,}98^2 - 0{,}2^2 = 0{,}92$$

13

$$tg66° = tg(90° - 24°) = \frac{tg90° - tg24°}{1 + tg90° \cdot tg24°}$$ no es posible calcularla así.

$$tg66° = tg(90° - 24°) = \frac{sen(90° - 24°)}{cos(90° - 24°)} = \frac{sen90° \cdot cos24° - sen24° \cdot cos90°}{cos90° \cdot cos24° + sen90° \cdot sen24°}$$
$$= \frac{0{,}92}{0{,}39} = 2{,}36$$

3. DEMOSTRACIONES Y SIMPLIFICAR.

Ecuación fundamental

$\mathbf{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$

$\mathbf{cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha}$	$\mathbf{sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha}$	$\mathbf{1 + tag^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}}$	$\mathbf{1 + cotag^2\alpha = \frac{1}{sen^2\alpha}}$

Fórmulas del ángulo doble

$\mathbf{sen2\alpha = 2.sen\alpha.cos\alpha}$	$\mathbf{cos2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha}$	$\mathbf{tag2\alpha = \frac{2.tag\alpha}{1 - tag^2\alpha}}$

Fórmulas del ángulo mitad

$\mathbf{sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}}}$	$\mathbf{cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\alpha}{2}}}$	$\mathbf{tag\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{1 + cos\alpha}}}$

Fórmulas de la suma y de la resta

sen (a + b) = sena.cosb + senb.cosa	cos (a + b) = cosa.cosb – sena.senb	$\mathbf{tag(a + b) = \frac{taga + tagb}{1 - taga.tagb}}$
sen (a – b) = sena.cosb - senb.cosa	cos (a – b) = cosa.cosb + sena.senb	$\mathbf{tag(a - b) = \frac{taga - tagb}{1 + taga.tagb}}$

Transformación de suma en producto

$\mathbf{senA + senB = 2.sen\frac{A + B}{2}.cos\frac{A - B}{2}}$	$\mathbf{senA - senB = 2.cos\frac{A + B}{2}.sen\frac{A - B}{2}}$
$\mathbf{cosA + cosB = 2.cos\frac{A + B}{2}.cos\frac{A - B}{2}}$	$\mathbf{cosA - cosB = -2.sen\frac{A + B}{2}.sen\frac{A - B}{2}}$

Transformación de producto en suma

$\mathbf{sena.cosb = \frac{1}{2}[sen(a + b) + sen(a - b)]}$	$\mathbf{cosa.cosb = \frac{1}{2}[cos(a + b) + cos(a - b)]}$	$\mathbf{sena.senb = \frac{-1}{2}[cos(a + b) - cos(a - b)]}$

31. a. Demostrar:

$$\mathbf{\frac{tg\alpha + tag\beta}{cotg\alpha + cotag\beta} = tg\alpha \cdot tag\beta}$$

b. Demostrar:

$$\mathbf{\frac{1 - sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{cos\alpha}{1 + sen\alpha}}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/ZH3lOOVours

a.

$$\frac{\text{tgα}+\text{tagβ}}{\text{cotgα}+\text{cotagβ}}=\frac{\text{tgα}+\text{tagβ}}{\frac{1}{\text{tgα}}+\frac{1}{\text{tgβ}}}=\frac{\text{tgα}+\text{tagβ}}{\frac{\text{tgβ}+\text{tgα}}{\text{tgα}\cdot\text{tagβ}}}=\text{tgα}\cdot\text{tagβ}$$

b.

$$\frac{1-\text{senα}}{\text{cosα}}\cdot\frac{1+\text{senα}}{1+\text{senα}}=\frac{(1-\text{senα})(1+\text{senα})}{\text{cosα}\cdot(1+\text{senα})}=\frac{1-\text{sen}^2\text{α}}{\text{cosα}\cdot(1+\text{senα})}$$
$$=\frac{\cos^2\text{α}}{\text{cosα}\cdot(1+\text{senα})}=\frac{\text{cosα}}{1+\text{senα}}$$

32. **a. Demostrar: tgx + cotgx = cosecx·secx**

b. Demostrar: $\text{cotg}^2x - \cos^2x = \text{cotg}^2x\cdot\cos^2x$

VER VÍDEO https://youtu.be/Fx_8X016i1g

$$\text{tgx}+\text{cotagx}=\frac{\text{senx}}{\text{cosx}}+\frac{\text{cosx}}{\text{senx}}=\frac{\text{sen}^2\text{x}+\cos^2\text{x}}{\text{cosx}\cdot\text{senx}}=\frac{1}{\text{cosx}\cdot\text{senx}}=\frac{1}{\text{senx}}\cdot\frac{1}{\text{cosx}}=$$
$$=\text{cosecx}\cdot\text{secx}$$

$$\text{cotg}^2\text{x}-\cos^2\text{x}=\frac{\cos^2\text{x}}{\text{sen}^2\text{x}}-\cos^2\text{x}=\frac{\cos^2\text{x}-\cos^2\text{x}\cdot\text{sen}^2\text{x}}{\text{sen}^2\text{x}}=\frac{\cos^2\text{x}\cdot(1-\text{sen}^2\text{x})}{\text{sen}^2\text{x}}$$
$$=\frac{\cos^2\text{x}}{\text{sen}^2\text{x}}\cdot\cos^2\text{x}=\text{cotg}^2\text{x}\cdot\cos^2\text{x}$$

33. **a. Demostrar:**

$$\textbf{cotgα}-\frac{\textbf{cotg}^2\textbf{α}-\textbf{1}}{\textbf{cotgα}}=\textbf{tgα}$$

b. Demostrar: tan(x + kπ) = tan x

VER VIDEO https://youtu.be/upnERm6lR1Q

$$\text{cotgα}-\frac{\text{cotg}^2\text{α}-1}{\text{cotgα}}=\frac{\text{cotg}^2\text{α}-\text{cotg}^2\text{α}+1}{\text{cotgα}}=\frac{1}{\text{cotgα}}=\text{tgα}$$

$$\tan(x+k\pi)=\frac{\tan x+\overbrace{\tan k\pi}^{0}}{\underbrace{1-\tan x.\underbrace{\tan k\pi}_{0}}_{0}}=\tan x$$

34. **a. Demostrar:**

$$\textbf{1}+\textbf{tgα}+\textbf{tg}^2\textbf{α}=\frac{\textbf{sen}^2\textbf{α}+\textbf{senα}\cdot\textbf{cosα}+\textbf{cos}^2\textbf{α}}{\textbf{cos}^2\textbf{α}}$$

b. Demostrar:

$$\frac{\textbf{secα}-\textbf{cosα}}{\textbf{cosecα}-\textbf{senα}}=\textbf{tag}^3\textbf{α}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/xPeKQiFQph8

a.

$$1+\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha=1+\frac{\mathrm{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\mathrm{sen}\alpha\cdot\cos\alpha+\mathrm{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

b.

$$\frac{\sec\alpha-\cos\alpha}{\mathrm{cosec}\alpha-\mathrm{sen}\alpha}=\frac{\frac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha}{\frac{1}{\mathrm{sen}\alpha}-\mathrm{sen}\alpha}=\frac{\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1-\mathrm{sen}^2\alpha}{\mathrm{sen}\alpha}}=\frac{\frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha}{\mathrm{sen}\alpha}}=\frac{\mathrm{sen}^3\alpha}{\cos^3\alpha}=\mathrm{tag}^3\alpha$$

35. Demostrar:

$$\frac{\mathbf{sen^2\alpha-cos^2\alpha}}{\mathbf{sen\alpha-sen^3\alpha+cos\alpha-cos^3\alpha}}=\mathbf{sec\alpha-cosec\alpha}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/F2KFvAjTOhs

$$\frac{\mathrm{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha}{\mathrm{sen}\alpha-\mathrm{sen}^3\alpha+\cos\alpha-\cos^3\alpha}=\frac{\mathrm{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha}{\mathrm{sen}\alpha\cdot(1-\mathrm{sen}^2\alpha)+\cos\alpha\cdot(1-\cos^2\alpha)}=$$

$$=\frac{(\mathrm{sen}\alpha-\cos\alpha)\cdot(\mathrm{sen}\alpha+\cos\alpha)}{\mathrm{sen}\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos\alpha\cdot\mathrm{sen}^2\alpha}=\frac{(\mathrm{sen}\alpha-\cos\alpha)\cdot(\mathrm{sen}\alpha+\cos\alpha)}{\mathrm{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(\cos\alpha+\mathrm{sen}\alpha)}=\frac{(\mathrm{sen}\alpha-\cos\alpha)}{\mathrm{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cancel{\mathrm{sen}\alpha}}{\cancel{\mathrm{sen}\alpha}\cdot\cos\alpha}-\frac{\cancel{\cos\alpha}}{\mathrm{sen}\alpha\cdot\cancel{\cos\alpha}}=\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\mathrm{sen}\alpha}=\sec\alpha-\mathrm{cosec}\alpha$$

36. Simplifica la expresión siguiente.

$$\frac{\mathbf{2\cdot cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}}{\mathbf{cos2\alpha}}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/MQkmqm3hbMU

37. Demostrar:

$$\frac{\mathbf{sen(a+b)+sen(a-b)}}{\mathbf{cos(a+b)+cos\ (a-b)}}=\mathbf{tan\ a}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/e7oNoOd9kOA

38. Demostrar:

$$\mathbf{cotan(a\ +\ b)}\ =\frac{\mathbf{cotan\ a.cotan\ b-1}}{\mathbf{cotan\ a+cotan\ b}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/A8t9RoKJjng

$$\frac{\mathrm{cotan\ a.cotan\ b}-1}{\mathrm{cotan\ a}+\mathrm{cotan\ b}}=\frac{\frac{\cos a}{\mathrm{sen\ a}}\cdot\frac{\cos b}{\mathrm{sen\ b}}-1}{\frac{\cos a}{\mathrm{sen\ a}}+\frac{\cos b}{\mathrm{sen\ b}}}=\frac{\frac{\cos a.\cos b-\mathrm{sen\ a.sen\ b}}{\cancel{\mathrm{sen\ a.sen\ b}}}}{\frac{\cos a.\mathrm{sen\ b}+\cos b.\mathrm{sen\ a}}{\cancel{\mathrm{sen\ a.sen\ b}}}}=$$

$$\frac{\cos\ (a+b)}{\mathrm{sen}(a+b)}=\mathrm{cotan}(a+b)$$

39. a. Demostrar: $\mathbf{2.tan\ x.cos^2\frac{x}{2}-sen\ x=tan\ x}$

b. Simplificar:

$$\frac{\mathbf{sen\ 2x}}{\mathbf{1+cos\ 2x}}$$

c. Demostrar:

$$\mathbf{2.\tan x.\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos 2x}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/YD4QrMKVej4

a.

$$\frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2.\operatorname{sen} x.\cos x}{1+\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{2.\operatorname{sen} x.\cos x}{2.\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x$$

b.

$$2.\tan x.\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 2.\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.\frac{1+\cos x}{2} - \operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x.\cos x}{\cos x} - \operatorname{sen} x =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x + \cancel{\operatorname{sen} x.\cos x - \operatorname{sen} x.\cos x}}{\cos x} = \tan x$$

c. Acabamos de demostrar que el primer miembro es tg x (apartado a.) y que el segundo miembro es tgx (apartado b.), luego la igualdad es correcta.

40. Demostrar: cos x.cos(x – y) + sen x.sen(x – y) = cos y
VER VIDEO https://youtu.be/vY_A8QbUv-g

$\cos x.\cos(x-y) + \operatorname{sen} x.\operatorname{sen}(x-y) = \cos x.(\cos x.\cos y + \operatorname{sen} x.\operatorname{sen} y) + \operatorname{sen} x.(\operatorname{sen} x.\cos y - \operatorname{sen} y.\cos x) = \cos^2 x.\cos y + \cancel{\cos x.\operatorname{sen} x.\operatorname{sen} y} + \operatorname{sen}^2 x.\cos y - \cancel{\operatorname{sen} x.\operatorname{sen} y.\cos x} = \overbrace{(\operatorname{sen}2x + \cos2x)}^{\text{igual a 1}}.\cos y = \cos y$

41. Demostrar: cos 2x + sen 2x. tanx = 1
VER VIDEO https://youtu.be/UOpez67vUio

$$\cos 2x + \operatorname{sen} 2x.\tan x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 2.\operatorname{sen} x.\cancel{\cos x}.\frac{\operatorname{sen} x}{\cancel{\cos x}}$$

$$= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 2.\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

42. **a. Simplificar:**

$$\mathbf{\frac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 5x}{\cos 3x + \cos 5x}}$$

b. Simplificar:

$$\mathbf{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}.\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}$$

VER VIDEO https://youtu.be/xGDd97Dcqpo

a.

$$\frac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 5x}{\cos 3x + \cos 5x} = \frac{2.\cos\frac{3x+5x}{2}.\operatorname{sen}\frac{3x-5x}{2}}{2.\cos\frac{3x+5x}{2}.\cos\frac{3x-5x}{2}} = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \tan(-x) = -\tan x$$

b.

$$\frac{\text{sen}^2 x}{1-\cos x}.\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)=\frac{\text{sen}^2 x}{1-\cos x}.\left(1+\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)=\frac{\text{sen}^2 x}{1-\cos x}.\frac{2}{1+\cos x}$$
$$=\frac{2.\,\text{sen}^2 x}{1-\cos^2 x}=\frac{2.\,\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x}=2$$

43. Desarrollar cos (x + y + z)
VER VIDEO https://youtu.be/1gbHWjgy7Xc

cos (x + y + z) = cos [(x + y) + z] = cos (x + y).cos z – sen (x + y).sen z =
= (cos x.cos y – sen x.sen y).cos z – (sen x.cos y + sen y.cos x).sen z =
= cos x.cos y.cos z – sen x.sen y.cos z – sen x.cos y.sen z – cos x.sen y.sen z

44. Sabiendo que a + b = 60°, ¿cuál de las dos expresiones es mayor? sen a + sen b o cos a + cos b
VER VIDEO https://youtu.be/oKGNtA3GaPY

Si a + b = 60 → b = 60 – a → sen a + sen b = sen a + sen (60 – a) →

$$\rightarrow \text{sen a} + \text{sen } 60.\cos a - \text{sen a}.\cos 60 = \text{sen a} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\cos a - \frac{1}{2}\text{sen a}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos a+\frac{1}{2}\text{sen a}$$

Si a + b = 60 → b = 60 – a → cos a + cos b = cos a + cos (60 – a) →

$$\rightarrow \cos a + \cos 60.\cos a + \text{sen a}.\text{sen } 60 = \cos a + \frac{1}{2}.\cos a + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen a}$$
$$=\frac{3}{2}.\cos a+\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen a}$$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos a+\frac{1}{2}\text{sen a}}_{\text{sen a+sen b}} < \underbrace{\frac{3}{2}.\cos a+\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen a}}_{\text{cos a+cos b}} \rightarrow \text{sen a} + \text{sen b} < \cos a + \cos b$$

45. ¿Existe algún triángulo con los siguientes datos? C = 135°, b = $3\sqrt{2}$ cm. y c = 3 cm.
VER VIDEO https://youtu.be/kfsbGTuRNKs

No pues al lado b > c se le debe oponer un ángulo B > C. El triángulo tendría dos ángulos obtusos, imposible.

46. Demostrar:
$$\textbf{sen}\left(\mathbf{a}+\frac{\pi}{4}\right).\textbf{cos}\left(\mathbf{a}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}(\textbf{sen 2a}+1)$$
VER VIDEO https://youtu.be/aEs-3eeCDv4

$$\left(\text{sen a}.\cos\frac{\pi}{4}+\cos a.\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right).\left(\cos a.\cos\frac{\pi}{4}+\text{sen a}.\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$= \left(\text{sen a}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\text{a}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\left(\cos\text{a}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{sen a}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underbrace{\left(\cos\text{a}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{sen a}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}_{\text{binomio al cuadrado}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2\text{a} + \cos\text{a}.\text{sen a} + \frac{1}{2}\text{sen}^2\text{a} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{2\cos\text{a}.\text{sen a}}_{\text{sen 2a}} + \underbrace{\cos^2\text{a}+\text{sen}^2\text{a}}_{1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\text{sen 2a} + 1)$$

47. Si A, B y C son los ángulos de un triángulo, demostrar que la suma de sus tangentes coincide con el producto de estas. TagA + TagB + TagC = TagA·TagB·TagC

VER VIDEO https://youtu.be/wSm9apF-rSc

Si A, B y C son los ángulos de un triángulo suman 180°.

$A + B + C = 180 \to A + B = 180 - C \to \text{Tag}(A + B) = \text{Tag}(180 - C) \to$

$$\frac{\text{TagA} + \text{TagB}}{1 - \text{TagA}\cdot\text{TagB}} = \frac{\overbrace{\text{Tag180}}^{0} - \text{TagC}}{1 + \underbrace{\text{Tag180}}_{0}\cdot\text{TagC}} \to \frac{\text{TagA} + \text{TagB}}{1 - \text{TagA}\cdot\text{TagB}} = -\text{TagC} \to$$

$\text{TagA} + \text{TagB} = -\text{TagC}\cdot(1 - \text{TagA}\cdot\text{TagB}) \to$

$\text{TagA} + \text{TagB} = -\text{TagC} + \text{TagA}\cdot\text{TagB}\cdot\text{TagC}$

$\text{TagA} + \text{TagB} + \text{TagC} = \text{TagA}\cdot\text{TagB}\cdot\text{TagC}$

48. Demostrar:

$$\frac{\mathbf{cosx + senx}}{\mathbf{cosx - senx}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos2x}} + \mathbf{tan2x}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/OK1MnnsjcmQ

49. Demostrar:

$$\frac{\mathbf{2senx - sen2x}}{\mathbf{2senx + sen2x}} = \frac{\mathbf{(1 - cosx)^2}}{\mathbf{sen^2x}}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/YPqSLLfMMtQ

4. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.

ECUACIONES BÁSICAS.

VER VIDEO https://youtu.be/FpcYYbWiGOo

$$\text{sen x} = \frac{1}{2} \to \begin{cases} x_1 = 30° + 360°k; \left(\text{calculadora: shift sen}\,\frac{1}{2}\right) \\ x_2 = 180 - x_1 = 150° + 360°k \end{cases}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \to \begin{cases} x_1 = 135° + 360°k; \left(\text{calculadora: shift cos} -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ x_2 = 360° - x_1 = 225° + 360°k \end{cases}$$

$$\tan x = \sqrt{3} \to \begin{cases} x_1 = 60° + 360°k; \left(\text{calculadora: shift tan}\sqrt{3}\right) \\ x_2 = 180° + x_1 = 150° + 360°k \end{cases}$$

$$\text{sen } 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 60° + 360°k; \left(\text{calculadora: shift sen } \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \text{pasamos el 2 al otro miembro despues de añadir } 360°k \\ x_1 = 30° + 180°k \\ 2x_2 = 180° - x_1 = 120° + 360°k \\ x_2 = 60° + 180°k \end{cases}$$

50. Resolver la ecuación: 2.cos²x + cos x – 1 = 0
VER VIDEO https://youtu.be/lj6FjEg1LyQ

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2.2} = \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 60° + 360°k; \left(\text{calculadora: shift cos} \frac{1}{2}\right) \\ x_2 = 360 - x_1 = 300° + 360°k \end{cases} \\ \cos x = -1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 180° + 360°k; (\text{calculadora: shift cos} - 1) \\ \cancel{x_2 = 360° - x_1 = 180° + 360°k} \end{cases} \end{cases}$$

51. Resolver la ecuación: tan²x – tanx = 0
VER VIDEO https://youtu.be/XVxiAPfk2hE

$$\tan x . (\tan x - 1) = 0 \begin{cases} \tan x = 0 \begin{cases} x_1 = 0° + 360°k; (\text{calculadora: shift tan0}) \\ x_2 = 180° + x_1 = 180° + 360°k \end{cases} \\ \tan x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45° + 360°k; (\text{calculadora: shift tan1}) \\ x_2 = 180° + x_1 = 225° + 360°k \end{cases} \end{cases}$$

52. Resolver sen²2x – cos²x = 0
VER VÍDEO https://youtu.be/sSz7rP6E7A8

53. Resolver:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \tan x = 1$$

VER VÍDEO https://youtu.be/oP9aYaRyLoY

54. Resolver:

$$\text{sen} x - \text{sen}\frac{x}{2} = 0$$

VER VÍDEO https://youtu.be/sT77WvdvOiI

55. Resolver:

$$\text{sen} x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/oMSpXdqQOeY

56. Resolver:

$$\mathbf{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{2}\,\mathbf{senx}=0$$

VER VÍDEO https://youtu.be/i9B59hOhNEs

57. Resolver:

$$\cos\frac{x}{2}-\mathrm{senx}=0$$

VER VÍDEO https://youtu.be/m35MohGphwM

58. Resolver la ecuación tanx·(4·cos²x – 3) = 0

VER VÍDEO https://youtu.be/MvNZMiJqpfs

59. Resolver: $\mathbf{sen2x\cdot cosx = 6\cdot sen^3x - 4senx}$

VER VÍDEO https://youtu.be/q3sOJS9Zv7Y

60. Resolver la ecuación: 4.cos 2x + 3.cosx = 1

VER VIDEO https://youtu.be/JQWHp_PSvuA

$$4.(\cos^2x-\mathrm{sen}^2x)+3.\cos x=1 \overset{\mathrm{sen}^2x=1-\cos^2x}{\Leftrightarrow} 4.[\cos^2x-(1-\cos^2x)]+3.\cos x=1;$$

$$8\cos^2x+3.\cos x-5=0;\ \cos x=\frac{-3\pm\sqrt{9+160}}{16}\to$$

$$\to\begin{cases}\cos x=\dfrac{5}{8}\to\begin{cases}x_1=51'32°+360°k;\\ x_2=360-x_1=308'68°+360°k\end{cases}\\[2ex] \cos x=-1\ \to\begin{cases}x_1=180°+360°k;\\ \cancel{x_2=360-x_1=180°+360°k}\end{cases}\end{cases}$$

61. Resolver la ecuación: tanx + cotan x = 5

VER VIDEO https://youtu.be/pXMF4FMAllg

$$\tan x+\frac{1}{\tan x}=5 \overset{\text{quitando denominadores}}{\Leftrightarrow} \tan^2x+1=5.\tan x;\ \tan^2x-5.\tan x+1=0;$$

$$\tan x=\frac{5\pm\sqrt{25-4}}{2}$$

$$\to\begin{cases}\tan x=\dfrac{5+\sqrt{25-4}}{2}\to\begin{cases}x_1=78'21°+360°k\\ x_2=180°+x_1=258'21°+360°k\end{cases}\\[2ex] \tan x=\dfrac{5-\sqrt{25-4}}{2}\to\begin{cases}x_1=11'79°+360°k\\ x_2=180°+x_1=191'79°+360°k\end{cases}\end{cases}$$

62. Resolver la ecuación:

$$\mathbf{sen\frac{x}{2} - cosx = 0}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/X9XfSTiXCM0

$$\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} - \cos x = 0;\ \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \cos x \xrightarrow{\text{elevando al cuadrado}} \frac{1-\cos x}{2} = \cos^2 x;$$

$$1 - \cos x = 2.\cos^2 x;\ 2.\cos^2 x + \cos x - 1 = 0; \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}\begin{cases} x_1 = 60° + 360°k; \\ x_2 = 360° - x_1 = 300° + 360°k \end{cases} \\ \cos x = -1 \begin{cases} x_1 = 180° + 360k; \text{ No válida. (sustituye en la ecuación).} \\ \cancel{x_2 = 360 - x_1 = 180° + 360k} \end{cases} \end{cases}$$

63. Resolver la ecuación: sen 3x + sen x = sen 2x

VER VÍDEO https://youtu.be/e6dWU1NPwPY

Aplicando la fórmula de transformación de suma en producto:

$$2.\operatorname{sen}\frac{3x+x}{2}.\cos\frac{3x-x}{2} = \operatorname{sen}2x;\ 2.\operatorname{sen}2x.\cos x = \operatorname{sen}2x;\ 2.\operatorname{sen}2x.\cos x - \operatorname{sen}2x = 0;$$

$$\operatorname{sen}2x.(2.\cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}2x = 0\begin{cases} 2x = 0° + 360k \rightarrow x = 180k \\ 2x = 180° + 360k \rightarrow x = 90 + 180k \end{cases} \\ 2.\cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 60° + 360°k \\ x = 300° + 360°k \end{cases} \end{cases}$$

64. Resolver la ecuación: cos⁴x – 2.sen²x – 1 = 0

VER VÍDEO https://youtu.be/XWaL8tP7QbI

$$\begin{cases} x_1 = 0° + 360°k \\ x_2 = 180° + 360°k \end{cases}$$

65. Resolver la ecuación: 2.tan x – 3.cotan x – 1 = 0

VER VÍDEO https://youtu.be/7I8v6wzrLEQ

$$2.\tan x - 3.\frac{1}{\tan x} - 1 = 0;\ 2.\tan^2 x - 3 - \tan x = 0;\ 2.\tan^2 x - \tan x - 3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{3}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 56'31° + 360k \\ x_2 = 180 + x_1 = 236'31° + 360°k \end{cases} \\ \tan x = -1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 135° + 360k \\ x_2 = 180 + x_1 = 315° + 360°k \end{cases} \end{cases}$$

66. Resolver la ecuación: $\mathbf{senx + \sqrt{3}.cosx = 2}$

VER VÍDEO https://youtu.be/zILz7bRxDCI

$$\overbrace{\text{senx}}^{\sqrt{1-\cos^2x}} + \sqrt{3}\cos x = 2;\ \sqrt{1-\cos^2x} + \sqrt{3}\cos x = 2;\ \sqrt{1-\cos^2x} = 2 - \sqrt{3}\cos x \ \xrightarrow{\text{elevo al cuadrado}}$$

$$1-\cos^2x = 4 - 4\sqrt{3}\cos x + 3\cos^2x;\ 4\cos^2x - 4\sqrt{3}\cos x + 3 = 0;\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 30° + 360°k \\ x = 360 - 30 = 330° + 360°k\,.\ \text{No válida.} \end{cases}$$

67. Resolver la ecuación: $\mathbf{4.sen\frac{x}{2} + 2.cosx = 3}$

VER VÍDEO https://youtu.be/DdTRfuUvrxo

$$\pm 4.\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} + 2.\cos x = 3;\ \pm 4.\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = 3 - 2.\cos x \ \xrightarrow{\text{elevo a 2}}$$

$$\rightarrow 16.\frac{1-\cos x}{2} = 9 - 12\cos x + 4.\cos^2x;\ 8 - 8\cos x = 9 - 12\cos x + 4.\cos^2x;$$

$$4.\cos^2x - 4.\cos x + 1 = 0;\ \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 60° + 360°k \\ x = 360 - 30 = 300° + 360°k\,. \end{cases}$$

68. Resolver la ecuación: cos 2x – sen²x – 1 = 0

$$\begin{cases} x_1 = 0° + 360°k \\ x_2 = 180° + 360°k \end{cases}$$

69. Resolver la ecuación: $\mathbf{tan\frac{x}{2} + cosx = 1}$

$$\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = 1 - \cos x \ \xrightarrow{\text{elevando al cuadrado}} \ \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = 1 - 2.\cos x + \cos^2x;$$

$$1 - \cos x = 1 - 2.\cos x + \cos^2x + \cos x - 2.\cos^2x + \cos^3x;\ \cos^3x - \cos^2x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos^2 x.(\cos x - 1) = 0 \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° + 360°k \\ x_2 = 360 - 90 = 270° + 360°k\,. \text{No válida.} \end{cases} \\ \cos x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360°k \\ \cancel{x_2 = 360 - 0 = 360° + 360°k}\,. \end{cases} \end{cases}$$

70. Resolver la ecuación: $\sqrt{2}.\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$

$$\begin{cases} x_1 = 90° + 360°k \\ x_2 = 180° + 360°k \end{cases}$$

71. Resolver la ecuación: $2.\text{senx}.\cos^2 x - 6.\text{sen}^3 x = 0$

VER VÍDEO https://youtu.be/NJPVqa7T2t4

$$\begin{cases} x_1 = 0° + 360°k \\ x_2 = 30° + 360°k \\ x_3 = 150° + 360°k \\ x_4 = 180° + 360°k \\ x_5 = 210° + 360°k \\ x_6 = 330° + 360°k \end{cases}$$

72. Resolver la ecuación: cos³ x - 3cosx = 3cosx senx

$$\cos^3 x - 3.\cos x - 3.\cos x.\text{senx} = 0 \xrightarrow[\cos x]{\text{factor común}} \cos x.(\cos^2 x - 3 - 3.\text{senx}) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° + 360°k \\ x_2 = 360 - 90 = 270° + 360°k\,. \text{No válida.} \end{cases} \\ \cos^2 x - 3 - 3.\text{senx} = 0;\ 1 - \text{sen}^2 x - 3.\text{senx} - 3 = 0;\ \text{sen}^2 x + 3.\text{senx} + 2 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} \text{senx} = -1 \rightarrow x = 270° + 360°k; \text{esta sol. ya la teníamos.} \\ \text{senx} = -2 \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases} \end{cases}$$

73. Resolver la ecuación: $\text{senx} - 2.\cos 2x = \frac{-1}{2}$

$$\begin{cases} 30° + 360°k \\ 150° + 360°k \\ 311'41° + 360°k \\ 228'59° + 360°k \end{cases}$$

74. Resolver la ecuación: 2·tanx·secx – tanx = 0

$$\tan x.(2.\sec x - 1) = 0 \begin{cases} \tan x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0° + 360°k \\ x = 180° + 360°k \end{cases} \\ \sec x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = 2;\ \text{no tiene solución.} \end{cases}$$

5. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES TRIGON0MÉTRICAS.

75. Representar la función y = sen 2x en el intervalo [-π, π]
VER VÍDEO https://youtu.be/_fBxNnQjJ08

76. Representar la función y = cos (x/2) en el intervalo [- π, π]
VER VÍDEO https://youtu.be/qIhwV0ugsn4

77. Representa la función y = 2·tan x en el intervalo [0, 2π]
VER VÍDEO https://youtu.be/HHUPv2yFli8