SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

EXAMEN DE SELECTIVIDAD DE MATEMÁTICAS II DE 2024.

1. Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calcula la matriz $M = A^TA - BB^T$

b. Justifica si M tiene inversa. En caso afirmativo resuelve el sistema de ecuaciones para calcular la inversa de M.

$$\mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Comprueba que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es la inversa de M.

c. Calcula la matriz X que cumple X·M + A = C

VER VÍDEO https://youtu.be/f-yMRgqJTNc

a. $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b. $|M| = -2$, M tiene inversa. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = M^{-1}$

c. $X = \begin{pmatrix} \frac{-7}{2} & 4 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$

2. Sean I_3 la matriz identidad 3x3 y A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calcula la matriz $B = 3\cdot A - kI_3$, indicando su expresión en función de k.

b. Discutir el rango de B según los valores del parámetro k.

c. ¿Para que valores de k la matriz B tiene inversa?

VER VÍDEO https://youtu.be/CEpZEfwtJAE

a. $B = \begin{pmatrix} 3-k & 0 & 0 \\ 6 & -k & 0 \\ -6 & 3 & 3-k \end{pmatrix}$

b. $|B| = (3-k)\cdot(-k)\cdot(3-k) = 0 \begin{cases} k = 0 \\ k = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} \text{Si } k \neq 0 \text{ y } k \neq 3, |B| \neq 0, \text{Rango B} = 3 \\ \text{si } k = 0, \text{Rango de B} = 2 \\ \text{si } k = 3, \text{Rango de B} = 1 \end{cases}$$

c. Si $k \neq 0$ y $k \neq 3$, $|B| \neq 0$, B tiene inversa.

3. Sean P = (−1, 1, 1), Q = (7, 1, 7) y R = (−4, 1, 5) puntos de R^3.

a. Demuestra que los tres puntos forman un triángulo rectángulo. Indica cuál de los 3 ángulos es recto.

b. ¿Se podría construir un cuadrado añadiendo un único nuevo vértice? Justifica la respuesta.

c. Prueba que, para cualquier valor de a real, el punto S = (a, 1, 0) es coplanario con P, Q y R.

VER VÍDEO https://youtu.be/Ttw8BlV_nZI

a. Calcula $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{QR}$ y los ángulos que forman dichos vectores. El ángulo del vértice P es recto.

b.Si $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PR}|$ podemos añadir un punto para hacer un cuadrado.

c. Si $\begin{vmatrix} \overrightarrow{PQ} \\ \overrightarrow{PR} \\ \overrightarrow{PS} \end{vmatrix} = 0$ los puntos son coplanarios. $\begin{vmatrix} 8 & -3 & -1-a \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ para todo valor de a pues tiene una fila de ceros.

4. Sean las rectas:

$$\mathbf{r:}\begin{cases} \mathbf{x + 2y = -1} \\ \mathbf{z = 1} \end{cases} \quad \mathbf{y\ s: x + 1 = \frac{y-1}{2} = z}$$

a. Estudia la posición relativa de las dos rectas.

b. Calcula la ecuación del plano que es paralela a las dos rectas y pasa por A = (2, 2, 1)

VER VÍDEO https://youtu.be/1W99Iow0m4Q

a. Se cruzan perpendicularmente.

b. $x + 2y - 5z = 1$

5. a. Dada la función f(x) = ax+b$\sqrt{x}$, determina los valores de a y b sabiendo que f(x) alcanza su máximo a x = 100 y que pasa por el punto (49, 91).

b. Dada la función, indica cuál es su dominio:

$$\mathbf{g(x) = \frac{(x-1)\cdot\sqrt{x}}{x^2-1}}$$

¿Es g(x) una función continua en su dominio? Justifica la respuesta y en caso negativo indica el tipo de discontinuidad que presenta.

VER VÍDEO https://youtu.be/5Itv50uU1Qc

a. a = - 1 y b = 20. Debemos comprobar que para estos valores de a y b la función tiene un máximo en x = 100.

b. $\begin{cases} f(x) \text{tiene una raíz de índice par} \rightarrow x \geq 0 \\ f(x) \text{tiene x en el denominador} \rightarrow x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \\ \text{Dom} = [0,1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$. Las funciones elementales son continuas en su dominio.

6. Calcula el área de la superficie comprendida entre las curvas f(x) = 6x – x² y g(x) = x² – 2x
VER VÍDEO https://youtu.be/0Qy3UG1CEe0

Los puntos de corte entre f(x) y g(x) son x = 0 y x = 4

$$\text{Área} = \int_0^4 6x - x^2 - (x^2 - 2x)dx = \frac{64}{3}\ u^2$$

7. El 38% de los habitantes de un pueblo afirman que su deporte preferido es la natación, mientras que el 21% prefieren el ciclismo y el resto se inclinan más por otros deportes. Si se elige al azar a una persona y, acto seguido una diferente, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a. Que las dos personas sean aficionadas a la natación.
b. Que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación.
c. Sabiendo que la primera prefiere el ciclismo, que la segunda no prefiera este deporte.

VER VÍDEO https://youtu.be/4l6P8o48H8Q

DIAGRAMA DE ÁRBOL

- Nat → 38/100
  - Nat → 37/99
  - Cicl → 21/99
  - Otros → 41/99
- Cicl → 21/100
  - Nat → 38/99
  - Cicl → 20/99
  - Otros → 41/99
- Otros → 41/100
  - Nat → 38/99
  - Cicl → 21/99
  - Otros → 40/99

a. $P(N_1 \cap N_2) = P(N1) \cdot P(N2/N1) = 38/100 \cdot 37/99 = 0{,}142$

b. $P(N_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(C_2/N_1) + P(C_1) \cdot P(N_2/C_1) =$
$= 38/100 \cdot 21/99 + 21/100 \cdot 38/99 = 0{,}1612$

c. $P(NC_2/C_1) = 38/99 + 41/99 = 79/99$

8. El peso, en gramos, de las judías en lata se distribuye normalmente con media μ y desviación típica 7,8. Sabiendo que el 10% de estas latas contienen menos de 200 g, calcula:

a. El valor de la media μ redondeándola a las unidades.

b. El porcentaje de latas que contienen más de 225 g de judías. Nota: emplea la media redondeada a las unidades.

c. El porcentaje de latas que contienen entre 190 g y 225 g de judías. Nota: emplea la media redondeada a las unidades.

VER VÍDEO https://youtu.be/Z87h6po1h0s

$$a.\, P(x<200)=0{,}1;\, P\left(z<\frac{200-\mu}{7{,}8}\right)=0{,}1;\, P\left(z<\frac{\mu-200}{7{,}8}\right)=0{,}9$$

$$\frac{\mu-200}{7{,}8}=1{,}28;\;\mu=209{,}984$$

$$b.\, P(x>225)=P\left(z>\frac{225-200}{7{,}8}\right)=P(z>1{,}92)=1-P(z<1{,}92)$$
$$=0{,}0274$$

$$c.\, P(190<x<225)=P(x<225)-P(x<190)=$$
$$=P\left(z<\frac{225-210}{7{,}8}\right)-P\left(z<\frac{190-210}{7{,}8}\right)=0{,}9674$$