SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

SELECTIVIDAD BALEARES DE MATEMÁTICAS CC. SS. 2024.

1. Una empresa está considerando la fabricación de 3 tipos de armarios diferentes A, B y C. Dispone de metal y madera.

- para fabricar cada unidad del modelo A, se requieren 5 kg de metal y 4 horas de trabajo de un operario.

- por unidad del modelo B, 10 kg de metal, 10 kg de madera y 10 horas de trabajo.

- por unidad del modelo C, 15 kg de metal y 5 horas de trabajo.

a. Si queremos producir 10 unidades de cada tipo ¿cuántos kilos de cada material necesitamos?

b. Si disponemos de 1550 kg de metal, 600 kg de madera y y 1050 horas de trabajo de operarios ¿cuántas unidades de cada tipo tenemos que fabricar para utilizar completamente todos los recursos?

c. Suponga que disponemos de 1550 kg de metal, toda la madera que necesitemos sin límite y 1050 horas de trabajo, pero por limitaciones de almacenaje solo podemos producir 125 unidades en total. ¿En este caso podemos utilizar completamente el metal, las horas y el almacén?

VER VÍDEO https://youtu.be/NpEIpVSGppc

a. $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix} \begin{cases} 300 \text{ kg de metal} \\ 100 \text{ kg de madera} \end{cases}$

b. $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 15 & 0 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ \mathrm{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1550 \\ 600 \\ 1050 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ \mathrm{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$

Debemos fabricar 40 unidad del armario A, 60 unidades del B y 50 unidades del C.

c. $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 5 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1515 \\ 1050 \\ 125 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ \mathrm{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 85 \\ 50 \end{pmatrix}$

El valor -10 indica que no podemos utilizar completamente el metal, las horas y el almacenamiento.

2. Un cliente nos pide ayuda para invertir un máximo de 10000 € en dos productos de inversión diferentes: acciones y bonos. El cliente quiere invertir al menos la misma cantidad en acciones que en

bonos. Además, el cliente quiere invertir entre 2000 € y 8000 € en bonos y entre 4000 € y 6000 € en acciones. El interés previsto para las acciones es de un 6% anual, y para los bonos es un 2% anual.

a. Plantea la maximización del interés previsto por las inversiones como un problema de programación lineal.

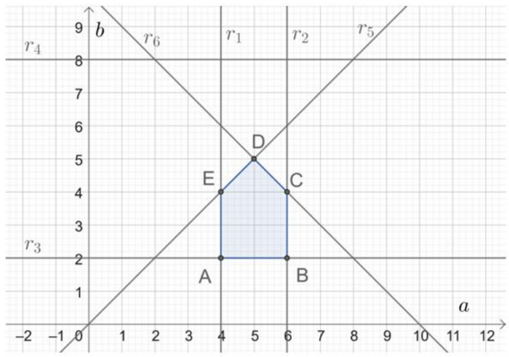
b. Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c. ¿Cuál tendría que ser la inversión de cada tipo de producto para maximizar el interés anual previsto? ¿Cuánto dinero se generaría con esta inversión?

VER VÍDEO https://youtu.be/EIilflFJEaY

Función a optimizar: $f(A, B) = A\cdot 0{,}06 + B\cdot 0{,}02$

Restricciones: $\begin{cases} 4000 \leq A \leq 6000 \\ 2000 \leq B \leq 8000 \\ A \geq B \\ A + B \leq 10000 \end{cases}$



La función es máxima en el vértice C que corresponde a invertir 6000 € en acciones y 4000 € en bonos generando unos beneficios de 440 €.

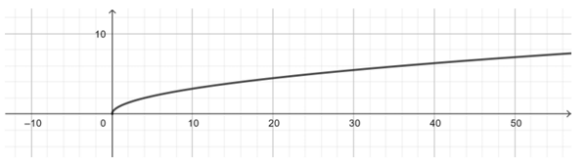
3. Considera la función f(x) = $\sqrt{x}$.

a. Haz un gráfico esquemático de la función, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales.

b. Trazas, sobre la gráfica, la recta tangente a f(x) en el punto x = 25 e indica su pendiente.

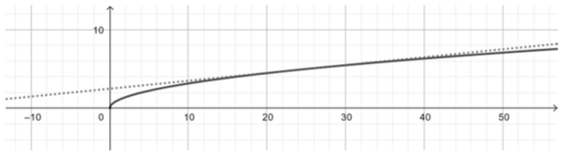
VER VÍDEO https://youtu.be/vxNjqzURUQc

Dominio $[0, +\infty)$; $f(0) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} > 0$ para $x \in (0, +\infty)$, creciente. Mínimo absoluto en x = 0 (0, 0)



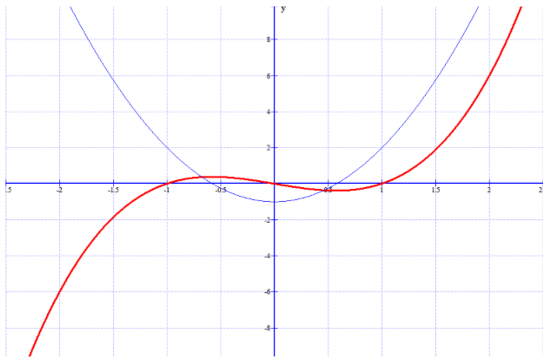
b. La pendiente de la tangente es la derivada en el punto de tangencia.

$f'(25) = 1/10$



ESTE EJERCICIO EN EL EXAMEN DE SELECTIVIDAD TENÍA UN ERROR DE ENUNCIADO.

4. Considera dos funciones que están representadas en la gráfica siguiente:



f(x) es la roja y g(x) es la azul.

a. Sabemos que una de las funciones es x·(x – 1)·(x + 1) y la otra es $\left(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\right)\cdot\left(\mathbf{x}+\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\right)$, pero no sabemos cuál es cuál. Deduce, en base a la gráfica, cuál es f(x) cuál g(x). Justifica la respuesta

b. Sabemos que una de ellas es la derivada de la otra. Di cuál es cuál.

c. Calcula el área entre la función g(x) y el eje de abscisas que se encuentra comprendida entre los puntos en que g(x) = 0.

a. Operando ambas funciones tenemos: $x\cdot(x-1)\cdot(x+1) = x^3 - x$, y $\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = x^2-\frac{1}{3}$

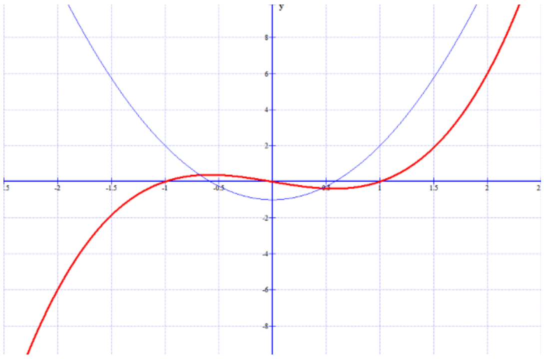
F(x), función roja) pasa por el origen de coordenadas, según vemos en la gráfica. Por tanto tenemos que $f(x) = x\cdot(x-1)\cdot(x+1) = x^3 - x$.

La función representada en azul pasa por el punto (1, 2), si sustituyo x = 1 en la función $x^2-\frac{1}{3}$ nos da $\frac{2}{3}$. Por tanto, no es verdad que f(x) sea una de las gráficas y g(x) sea la otra, como afirma el enunciado (error de enunciado).

b. f(x) es un polinomio de tercer grado y g(x) de segundo grado. g(x) debe ser la derivada de f(x). $f'(x) = 3x^2 - 1 \neq g(x)$. La afirmación del enunciado de que una es la derivada de la otra es falsa (de nuevo error de enunciado).

c. $\int_{\frac{-1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx = -\frac{4\cdot\sqrt{3}}{27} \rightarrow Área = \frac{4\cdot\sqrt{3}}{27}\,u^2$

4. Considera dos funciones que están representadas en la gráfica siguiente:



f(x) es la roja y g(x) es la azul.

a. Sabemos que una de las funciones es x·(x – 1)·(x + 1) y la otra es $3\cdot\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, pero no sabemos cuál es cuál. Deduce, en base a la gráfica, cuál es f(x) cuál g(x). Justifica la respuesta

b. Sabemos que una de ellas es la derivada de la otra. Di cuál es cuál.

c. Calcula el área entre la función g(x) y el eje de abscisas que se encuentra comprendida entre los puntos en que g(x) = 0.

VER VÍDEO https://youtu.be/K4jqIRBTu18

a. Operando ambas funciones tenemos: $x\cdot(x-1)\cdot(x+1) = x^3 - x$,
y $3\cdot\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\cdot x^2 - 1$

F(x), función roja) pasa por el origen de coordenadas, según vemos en la gráfica. Por tanto tenemos que $f(x) = x\cdot(x-1)\cdot(x+1) = x^3 - x$ y $g(x) = 3\cdot x^2 - 1$

b. f(x) es un polinomio de tercer grado y g(x) de segundo grado. g(x) debe ser la derivada de f(x). $f'(x) = 3x^2 - 1 = g(x)$

c. $\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(3\cdot x^2 - 1)\,dx = -\frac{4\cdot\sqrt{3}}{9} \to Área = \frac{4\cdot\sqrt{3}}{9}\ u^2.$

5. Según un modelo, la población de una ciudad determinada, p(en millones de habitantes), depende del tiempo que ha pasado, t (en años), desde el inicio del año 2000, según la relación:

$$\mathbf{p(t) = \frac{4}{1+3\cdot e^{-0,2t}},\ para\ t \geq 0.}$$

Te proporcionamos la siguiente información, que puedes utilizar si así lo consideras:

$$\mathbf{p'(t) = \frac{2,4\cdot e^{-0,2t}}{(1+3\cdot e^{-0,2t})^2} \qquad \int p(t)dt = 20\cdot \ln(e^{0,2t}+3) + C}$$

a. ¿Qué población teníamos al inicio del año 2000 (es decir, para t = 0)?¿En qué año había exactamente 2 millones de habitantes?

b. ¿En qué intervalo la población aumenta? ¿en cuáles disminuye?

c. ¿A qué tiende la población de la ciudad a largo plazo? ¿a qué tiende el ritmo de crecimiento de la población a largo plazo?

VER VÍDEO https://youtu.be/1r-QuWSSM5k

a. p(0) = 1, 1 millón de habitantes.

$$\frac{4}{1+3\cdot e^{-0,2t}} = 2;\ 1+3\cdot e^{-0,2t} = 2;\ 3\cdot e^{-0,2t} = 1;\ e^{-0,2t} = \frac{1}{3};\ t = \frac{-\ln\frac{1}{3}}{0,2} = 5,49$$

b.

$\frac{24\cdot e^{-0,2t}}{(1+3\cdot e^{-0,2t})^2} > 0, \forall t \geq 0.$ La función es siempre creciente. El número de habitantes siempre aumenta.

c.

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{4}{1+3\cdot e^{-0,2t}} = 4,\text{ la población tiende a estabilizarse en 4 millones de hab.}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{24\cdot e^{-0,2t}}{(1+3\cdot e^{-0,2t})^2} = 0$$

6. En una población,

- el 50% de habitantes con mayor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 10%, y

- el 50% de habitantes con menor poder adquisitivo tiene una probabilidad de vivir de alquiler de un 40%.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo un habitante al azar, éste viva de alquiler?

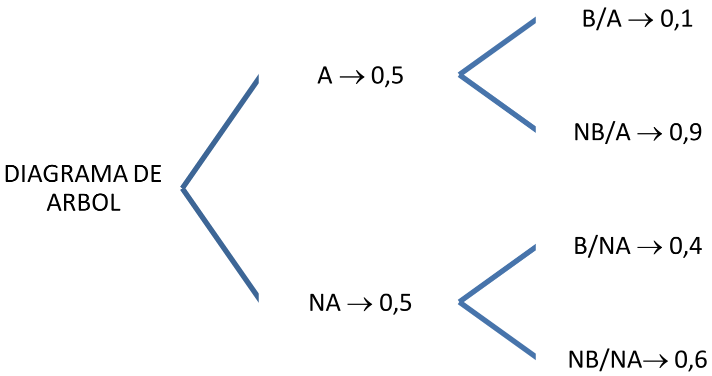
b. ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente 3 habitantes al azar, los 3 vivan de alquiler?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente 3 habitantes al azar, al menos uno de los 3 viva de alquiler?

VER VÍDEO https://youtu.be/WfGbJMPsNyU

A: poder adquisitivo alto. $\bar{A}$: poder adquisitivo bajo. B: ir de alquiler. $\bar{B}$: no ir de alquiler.

$P(A) = 0,5; P(B/A) = 0,1; P(\bar{A}) = 0,5; P(B/\bar{A}) = 0,4$



a. $P(B) = P(A)\cdot P(B/A) + P(NA)\cdot P(B/NA) = 0,5\cdot 0,1 + 0,5\cdot 0,4 = 0,25$ (25%)

b. $P(B_1\cap B_2\cap B_3) = (0,25)^3 = 0,015625$

c. P(al menos uno viva de alquiler) = 1 – P(ninguno viva de alquiler)

$P(NB) = 1 - P(B) = 1 - 0,25 = 0,75$; que de tres ninguno viva de alquiler $= 0,75^3 = 0,422$

P(al menos uno viva de alquiler) = 1 – P(ninguno viva de alquiler) = 1 – 0,422 = 0,578

7. La probabilidad de que llueva un día cualquiera es siempre la misma. Ahora bien, si un día cualquiera ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 40%; y si un día cualquiera no ha llovido, la probabilidad de que llueva el día siguiente del 5%.

Considera los sucesos siguientes

- A: hoy ha llovido

- B: mañana lloverá

a. Calcula P(A) y P(B).

b. ¿Qué es más probable: que llueva mañana si sabemos qué ha llovido hoy; o bien que llueva hoy si sabemos que mañana seguro que lloverá?

VER VÍDEO https://youtu.be/dx9oyN7eVGw

a.

$$P(A) = P(B);\ P(B/A) = 0{,}4 = \frac{P(B \cap A)}{P(A)};\ P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = 0{,}05$$

$$\begin{cases} 0{,}4 \cdot P(A) = P(B \cap A) \\ 0{,}05 \cdot P(\bar{A}) = P(B \cap \bar{A}) \rightarrow 0{,}05 \cdot [1 - P(A)] = P(B \cap \bar{A}) \end{cases} \begin{cases} 0{,}4 \cdot P(B) = P(B \cap A) \\ 0{,}05 \cdot [1 - P(B)] = P(B \cap \bar{A}) \end{cases}$$

$$0{,}4 \cdot P(B) + 0{,}05 - 0{,}05 \cdot P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B) \rightarrow P(B) = 0{,}0769$$

$$P(A) = P(B) = 0{,}0769$$

b.

$$P\left({}^{B}/_{A}\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = P\left({}^{A}/_{B}\right)$$

8. Según el Instituto Nacional de Estadística, la esperanza de vida de una persona nacida en el 2020 es de 79,6 años para los hombres y de 83,6 años para las mujeres. Supongamos también que el número de años que vivirá una persona nacida en el 2020 tiene una desviación típica de 10 años, tanto para los hombres como para las mujeres.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre nacido en el 2020 viva más de 60 años? y ¿de que viva entre 60 y 70 años?

b. ¿Qué es más probable: que un hombre nacido en 2020 viva más de 89,6 años o que una mujer nacida en 2020 viva más de 93,6 años?

VER VÍDEO https://youtu.be/ucYHTjk3CMc

a.

$$P(x > 60) = P\left(z > \frac{60 - 79{,}6}{10}\right) = P(z > -1{,}96) = P(z < 1{,}96) = 0{,}9750$$

$$P(60 < x < 70) = P\left(\frac{60 - 79{,}6}{10} < z < \frac{70 - 79{,}6}{10}\right) = P(-1{,}96 < z < -0{,}96) =$$

$$P(z < -0{,}96) - P(z < -1{,}96) = 1 - P(z < 0{,}96) - [1 - P(1{,}96)] = 0{,}1435$$

b.

$$\left.\begin{cases} P(x > 89{,}6) = P\left(z > \frac{89{,}6 - 79{,}6}{10}\right) = P(z < 1) \\ P(x > 93{,}6) = P\left(z > \frac{93{,}6 - 83{,}6}{10}\right) = P(z < 1) \end{cases}\right. \rightarrow \text{iguales}$$