SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

SELECTIVIDAD BALEARES DE MATEMÁTICAS II 2024.

1. Una fábrica de vinos de Mallorca produce 3 tipos de vino: tinto, blanco y rosado. Con la finalidad de saber el precio de cada tipo de vino, hemos comprado vino, el mismo día y a la fábrica misma, de cuatro maneras diferentes.

- **Comprando 3 botellas de vino tinto y dos de vino blanco hemos pagado 67 €**
- **Comprando dos botellas de vino tinto, cuatro de vino blanco y una de rosado hemos pagado 85 €**
- **Comprando una botella de vino tinto y una de vino rosado hemos pagado 21 €**
- **Comprando cuatro botellas de vino blanco y 5 de vino rosado hemos pagado 85 €**

a. Escribe, en forma matricial, el sistema de ecuaciones lineales que se habría de resolver para poder descubrir el precio de cada tipo de vino.

b. ¿Es necesario tener los datos de las cuatro compras para saber el precio de cada tipo de vino? Justifica la respuesta

c. ¿Calcula cuál es el precio de cada tipo de vino?

VER VÍDEO https://youtu.be/rleJcHtTZC4

a. $$\begin{cases} 3T+2B=67 \\ 2T+4B+R=85 \\ T+R=21 \\ 4B+5R=85 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ B \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 85 \\ 21 \\ 85 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} T = 14\text{ €} \\ B = 12{,}5\text{ €} \\ R = 7\text{ €} \end{cases}$$

2. Consideremos las matrices A de dimensión 3 x 3 que satisfacen $3A + I = A^2$

a. Calcula la expresión de la matriz inversa de A.

b. Dada la ecuación matricial A + 3AX = 5I, donde A es una de las matrices del enunciado. Calcula, en función de A (no de su inversa) y de la identidad, la matriz X. ¿Qué dimensión tiene la matriz X? Justifica la respuesta.

c. Calcula todas las matrices de la forma A= $\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c} \end{pmatrix}$ **que satisfacen las condiciones del enunciado.**

VER VÍDEO https://youtu.be/xTTqmzVEI4M

a. $3A + I = A^2 \rightarrow A^2 - 3A = I \rightarrow \begin{cases} A \cdot (A - 3I) = I \\ (A - 3I) \cdot A = I \end{cases} \rightarrow A^{-1} = A - 3I$

b. $A + 3AX = 5I \rightarrow 3AX = 5I - A \rightarrow AX = \frac{1}{3}(5I - A) \rightarrow$

$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot \frac{1}{3}(5I - A) \rightarrow X = A^{-1} \cdot \frac{1}{3}(5I - A) \rightarrow X = (A - 3I) \cdot \frac{1}{3}(5I - A)$

$X = \frac{5}{3}A - \frac{16}{3}I$

c. $3 \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^2 \begin{cases} a = 0, b = 3 \text{ y } c = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ a = 0, b = 3 \text{ y } c = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ a = 3, b = 0 \text{ y } c = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ a = 3, b = 0 \text{ y } c = \frac{3-+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

3. Considera los puntos A = (0, 0, 0), B = (2, - 1, 3) y C (- 1, 2, 1)

a. Calcula el punto D tal que ABDC sea un paralelogramo.

b. Calcula uno de los puntos E del espacio de tal manera que la recta AE sea perpendicular al plano ABC y que la distancia entre los puntos A y E sea 1.

c. Escribe la ecuación de uno de los planos paralelos al plano ABC que dista una unidad de este.

VER VÍDEO https://youtu.be/OlC8Q4Fsjto

a. $D = B + \overrightarrow{AC} = (1,1,4)$

b. $E = \left(\frac{7}{5}\sqrt{\frac{25}{83}}, \sqrt{\frac{25}{83}}, \frac{-3}{5}\sqrt{\frac{25}{83}}\right)$

c. $-7x - 5y + 3z + \sqrt{83} = 0$; $-7x - 5y + 3z - \sqrt{83} = 0$

4. a. Discutir según los valores de a y b (parámetros reales), la posición relativa de los planos siguientes:

π_1: 3x + ay – z = 1 y π_2: 6x + y – 2z = b

b. Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano π y qué pasa por el punto de corte entre la recta s y el mismo plano π, siendo

$$\pi: \begin{cases} x = 2 + 4\alpha - \beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \quad \text{y } s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/A-Wi-PCw6Jc

a. $a \neq 1/2$ se cortan en una recta. Si $a = 1/2$ y $b = 2$ coinciden. Si $a = 1/2$ y $b \neq 2$ son paralelas.

b. $(x, y, z) = \left(\frac{13}{10}, \frac{3}{10}, \frac{17}{20}\right) + \mu(3,1,-12)$

5. Queremos construir una valla en un campo rectangular empleando diferentes materiales en cada lado. Empezando por el fondo del campo y moviéndonos alrededor de éste en el sentido contrario a las agujas del reloj, el coste del material para cada lado es de 6, 9, 12 y 14 €/m, respectivamente. Si hemos

de gastar exactamente 1000 € para comprar el material del vallado, determina las dimensiones del campo que maximizarán el área encerrada.
VER VÍDEO https://youtu.be/JZNCkGLEcOA

1. Función a optimizar: f(x,y) = x·y (área del rectángulo).
2. Relación entre variables: $6y + 9x + 12y + 14x = 1000$; $23x + 18y = 1000$;

$$x = \frac{1000 - 18y}{23}$$

3. Sustituir 2 en 1.

$$f(y) = \frac{1000 - 18y}{23} \cdot y = \frac{1}{23} \cdot (1000y - 18y^2)$$

4. Derivo, igualo a cero y resuelvo.

$$f'(y) = \frac{1}{23} \cdot (1000 - 36y) = 0; y = \frac{250}{9} = 27{,}78 \text{ m}; x = \frac{1000 - 18y}{23} = 21{,}74 \text{ m}$$

6. Sea la función:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{b \cdot e^x + a + 1;\ x \le 0} \\ \mathbf{a \cdot x^2 + b(x+3); 0 < x \le 1} \\ \mathbf{a \cdot \cos(\pi x) + 7bx;\ x > 1} \end{cases}$$

a. Calcular los valores de a y b para los cuales f(x) es continua.
b. Si a = 3 y b = 2, calcula el área comprendida entre x = - 1, x = 0 y el eje OX.
VER VÍDEO https://youtu.be/ladPmsquBEM

a. $\begin{cases} a = 2b - 1 \\ a = \frac{3}{2}b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$

b. área = 5,26 u².

7. Sean AYB dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que satisfacen que P(AUB) = 0,7, P(A∩B) = 0.1 y P(A∩$\bar{B}$) = 0,35. Calcula:
a. P(A)
b. P(B)
c. $P(\bar{A} U \bar{B})$
d. Son A y B sucesos independientes?
VER VÍDEO https://youtu.be/Qn_4-AxIBDM

a. P(A) = P(A∩B) + P(A∩$\bar{B}$) = 0,1 + 0,35 = 0,45
b. P(AUB) = P(A) + P(B) – P(A∩B); P(B) = 0,35
c. P($\bar{A}$U$\bar{B}$) = 0,9
d. P(A∩B) = 0,1; P(A)·P(B) = 0,45·0,35 = 0,1575.
P(AUB) ≠ P(A)·P(B) → sucesos dependientes.

8. La duración de los embarazos humanos desde la concepción hasta el nacimiento se aproxima a una distribución normal con una media de 266 días y una desviación típica de 16 días.
a. Qué proporción de todos los embarazos durará entre 240 y 270 días
b. Si nos fijamos en el 70% de los embarazos que más duran, cuál es su duración?
Ver vídeo https://youtu.be/uXE9-jRE2YE

N(266,16)

$$\mathrm{P}(240 < \mathrm{x} < 270) = \mathrm{P}\left(\frac{240-266}{16} < \mathrm{z} < \frac{270-266}{16}\right) = \mathrm{P}(-1{,}63 < \mathrm{z} < 0{,}25) = 0{,}5471$$

b. $P(x > k) = 0{,}7; P\left(z > \frac{k-266}{16}\right) = 0{,}7; P\left(z < \frac{266-k}{16}\right) = 0{,}7$

k = 257,6 años