SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

PREPARAR EL EXAMEN FINAL DE MATEMÁTICAS CC. SS. 2024

1. Queremos contratar una empresa de gestión de entre las siguientes:
– La empresa A nos cobra 150 € de coste base, y adicionalmente 5 € por cada cliente y 3 € por cada factura que emite.
– La empresa B nos cobra 300 € de coste base, 10 € por cada cliente, y no cobra por emitir facturas.
– La empresa C nos cobra 100 € de coste base, no cobra en función del número de clientes, pero cobra 5 € por cada factura que emite.

a. ¿Si el año pasado tuviéramos 50 clientes y, en total, emiten 180 facturas, qué empresa nos hubiera costado menos contratar?

b. De cara al próximo año, tenemos una previsión de x clientes e y facturas. Con esta previsión, la empresa A nos costaría 1050 € y la empresa B nos costaría 900 €. Calcula el número de clientes x y el número de facturas y previstos.

c. Con x clientes e y facturas, ¿cuánto nos costaría la empresa C?

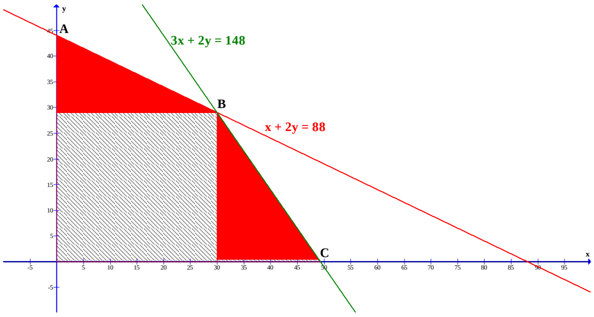
a. $A = 940$ €, $B = 800$ € y $C = 1000$ €
b. $x = 60$ e $y = 200$
c. $C = 1100$ €

2. Una fábrica de papel quiere consumir hasta 88 kilos de papel reciclado y 148 kilos de papel normal. Para ello fabrica dos tipos de lotes A y B. Los lotes del tipo A están formados por un kilo de papel reciclado y tres kilos de papel normal y los del tipo B por dos kilos de papel de cada clase. El precio de venta de cada lote de tipo A es de 1,1 € y el de tipo 1,5 €. ¿Cuántos lotes de cada tipo se deben vender para maximizar los ingresos y a cuánto ascienden esos ingresos?

	RECICLADO	NORMAL	
TIPO A (x)	1	3	1,1 €
TIPO B (y)	2	2	1,5 €
	88	148	

Función a optimizar: $C(x, y) = 1{,}1\,x + 1{,}5\,y$

Restricciones:
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + 2y \leq 88$
$3x + 2y \leq 148$



Punto A $(0, 44) \rightarrow C(A) = 66$

Punto B $= \begin{cases} 3x + 2y = 148 \\ x + 2y = 88 \end{cases} \rightarrow B(30,29) \rightarrow C(B) = 76,5$

Punto $C(148/3, 0) \rightarrow C(C) = 67,77$

Los ingresos son máximos (76,5) con 30 lotes del tipo A y 29 lotes del tipo B.

3. Un camión transporta una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen y, como máximo, un peso de 18 toneladas. Puede transportar:
– Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 80 € por metro cúbico.
– Grava, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 100 € por metro cúbico.
– Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 25 € por metro cúbico.
Nos interesa calcular el precio más alto que podrá facturar en un viaje. Para ello, se pide:
a. Plantea la maximización de este precio como un problema de programación lineal con dos variables.
b. Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan.
c. Calcula el número de toneladas de cada material que se deben transportar con el fin de alcanzar el precio máximo, y determina también este precio máximo.

a.

$$\begin{cases} \text{Arena } x \\ \text{Grava } y \\ \text{Ceniza } z \end{cases} \rightarrow x + y + z = 12; z = 12 - x - y; \begin{cases} \text{Arena } x \\ \text{Grava } y \\ \text{Ceniza } 12 - x - y \end{cases}$$

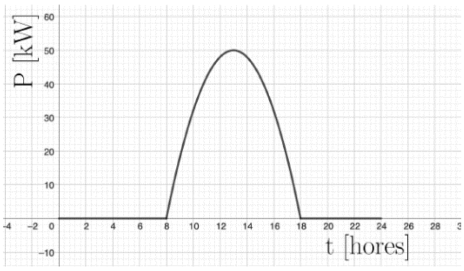
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 12 - x - y \geq 0 \\ 1,6x + 1,8y + 0,5(12 - x - y) \leq 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 12 \\ 1,1x + 1,3y \leq 12 \end{cases}$$

$f(x, y) = 80x + 100y + 25 \cdot (12 - x - y) = 55x + 75y + 300.$

b y c. El precio máximo es de 992,31 € con 0 m^3 de arena, 9,23 m^3 de grava y 2,77 m^3 de ceniza; que equivalen a 16,62 toneladas de grava y 1,30 toneladas de ceniza.

4. La potencia generada por una placa solar, P (expresado en kW) depende del tiempo, t (expresado en horas) transcurrido según la expresión siguiente:

$$\mathbf{P(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<8\\ -2t^2+52t+c & 8\le t<18\\ 0 & 18\le t\le 24\end{cases}}$$



Donde c es un parámetro real.

a. Teniendo en cuenta que la función es continua, ¿cuál es el valor del parámetro c?

b. Teniendo en cuenta que el valor máximo se alcanza a las 13:00 h calcula, con la expresión dada, cuál es la potencia en este momento.

c. ¿En qué intervalos la función es creciente? ¿y decreciente?

a. $c = -288$

b. $P(t) = -2t^2 + 52t + c$; $P(13) = -2\cdot 132 + 52\cdot 13 - 288$; $P(13) = 50$ kW

c. Crece en (8, 13) y decrece en (13, 18). Los intervalos donde la función es constante son técnicamente crecientes (y también decrecientes) pero no estrictamente crecientes (ni estrictamente decrecientes).

5. Consideremos el peso de un adulto, p (en kg), y su metabolismo basal, m (en watts). Un investigador nos proporciona el modelo siguiente: $p(m) = 0{,}1\cdot m^{1,5}$ $m \in (0,+\infty)$.

a. Haz una gráfica esquemática de la función p(m), indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos locales.

b. Halla la función que da el metabolismo basal en función del peso m(p), es decir aísla la variable m.

a. El dominio es $(0, +\infty)$. La derivada de la función es positiva, luego la función es creciente. El cero no pertenece al dominio, no tiene mínimos. $\lim\limits_{m\to\infty} p(m) = +\infty$ no tiene máximo.

b. $m(p) = 4{,}64\cdot p^{0,667}$

6. Consideremos las funciones $f(x) = (x + 2)^3$ y $g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$.

a. Justifica, calculando, que $f'(x) = g'(x)$

b. ¿Es cierto que $f(x) = g(x)$?

c. Calcula $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

a. $f'(x) = 3\cdot(x + 2)^2 = 3\cdot(x^2 + 4x + 4) = 3x^2 + 12x + 12 = g'(x)$

b. No, pues $f(0) = 8$ y $g(0) = 0$

c. Límite igual a 1.

7. Manuel elige al azar dos cifras entre 0 y 9, que podrían estar repetidas.

a. Cuál es la probabilidad de que ambas cifras sean múltiplo de 3?

b. El producto de las dos cifras es un múltiplo de 3 si al menos 1 de las cifras es múltiplo de 3. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las dos cifras sea múltiplo de 3?

c. Pepe te da su número de teléfono, que contiene 9 cifras entre 0 y 9 posiblemente repetidas y que supondremos que son cifras escogidas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las 9 cifras sea múltiplo de 3?

a. $P(A \cap B) = 16/100$
b. $P(AUB) = 64/100$
c. $1 - (6/10)^9 = 0{,}990$

8. De un total de 80 alumnos, el 80% de los alumnos han aprobado un examen de matemáticas, y el 75% han aprobado un examen de física. Además, de los que han aprobado el examen de matemáticas, el 50% han aprobado el examen de física.

a. De los que han suspendido el examen de física, ¿cuántos han aprobado el de matemáticas?

b. ¿Cuántos alumnos han aprobado alguno de los dos exámenes?

c. Aprobar el examen de física y aprobar el examen de matemáticas ¿son sucesos independientes?

a. $P(M/\bar{F}) = 0{,}6$
b. $P(MUF) = 0{,}9$; $0{,}9 \cdot 80 = 72$ alumnos.
c. No, pues $P(M \cap F) \neq P(M) \cdot P(F)$

9. Para estudiar la vida de las tortugas marinas, hemos recopilado la edad que tenían algunos ejemplares cuando murieron por causas naturales obteniendo la siguiente tabla:

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8		$\bar{x}$
55	62	69	70	72	77	94	103		75,25

suponemos que estos datos siguen una distribución normal y que su desviación típica poblacional es de 20 años

a. Calcular el intervalo de confianza para la media poblacional con un 90% de confianza. Suponemos ahora además que la media poblacional es de 75,25 años

b. Cuál es la probabilidad de que una tortuga Marina supere los 80 años de vida

c. Cuál es la probabilidad de que una tortuga Marina supere los 80 años de vida pero no los 100 años de vida?

a. (63,62; 86,88)
b. 0,4052
c. 0,2977

10. Queremos medir el consumo de un coche eléctrico que tiene una batería de 50 kWh y que tiene un consumo diferente sí lo conducimos por autopista, por ciudad o por carretera de montaña. Hicimos 3 salidas, cada una empezando con la batería completamente cargada y pudimos recorrer las siguientes distancias hasta acabar la batería: primer día: 180 km por autopista y 60 km por ciudad. Segundo día: 200 kg por ciudad y 80 km por carretera de montaña. Tercer día: 150 km por autopista y 80 km por carretera de montaña.

a. Calcula el consumo del coche para cada uno de los tipos de carretera.

b. Si únicamente utilizamos el coche para conducir por ciudad cuál sería la cantidad total de kilómetros que podríamos recorrer con la batería completamente cargada?

a. Autopista (0,222), ciudad (0167) y montaña (0,208)
b. 300 km.

11. Considerar las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

a. Calcular $A^2 - B \cdot C^t$.

b. Resolver la ecuación matricial $A \cdot X + B = C$.

a.

$$A^2 - BC^t = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 13 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

b.

$$AX + B = C \rightarrow AX = C - B \rightarrow X = A^{-1}(C - B) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

12. Un estudio acerca de la presencia de CO_2 en la atmosfera de una ciudad indica el nivel de contaminación viene dado por la función: $C(t) = -0.2t^2 + 4t + 25$, $0 \le t \le 25$. Siendo t los años transcurridos desde el año 2000. Se pregunta:

a. ¿En qué año se alcanzará un máximo en el nivel de contaminación?

b. ¿En qué año se alcanzará el nivel de contaminación cero?

c. ¿Cuándo t = 17 el nivel de contaminación será creciente o decreciente?

a.

$$C' = -0{,}4t + 4 = 0 \rightarrow t = 10 \rightarrow \begin{cases} C(0) = 25 \\ C(10) = 55 \rightarrow t = 10, \text{año } 2010 \\ C(25) = 0 \end{cases}$$

b.

$$-0.2\,t^2 + 4\,t + 25 = 0 \begin{cases} t = -5 \text{ NO} \\ t = 25\text{ , año } 2025 \end{cases}$$

c. $C'(17) = -2{,}8 < 0$, decreciente.

13. Sean A y B dos sucesos que tienen probabilidades 0.4 y 0.6 respectivamente. Se sabe que, dado B, la probabilidad de que ocurra A es 0.3. Se pide:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran ambos sucesos a la vez?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra cualquiera de los sucesos?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos?

$\mathrm{P(A)} = 0{,}4;\ \mathrm{p(B)} = 0{,}6 \text{ y } \mathrm{P(A/B)} = 0{,}3$

	B	$\overline{\mathrm{B}}$	
A	0,18	0,22	0,4
$\overline{\mathrm{A}}$	0,42	0,18	0,6
	0,6	0,4	

a.

$$\mathrm{P(A/B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}} \rightarrow \mathrm{P(A \cap B)} = 0{,}18$$

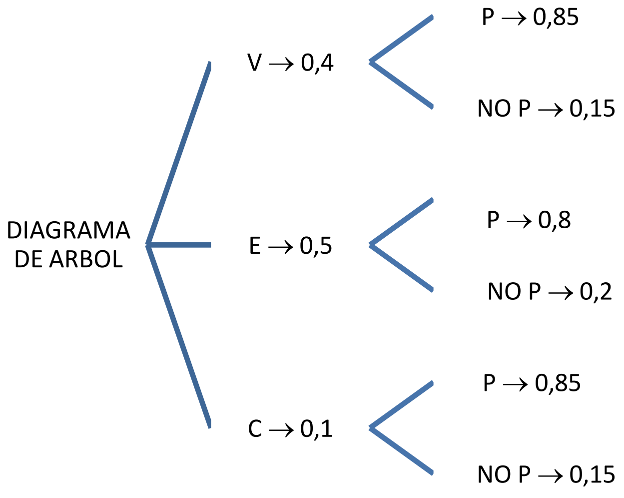
b. $\mathrm{P(AUB)} = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P(A \cap B)} = 0{,}82$

c. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}18$

14. En una cierta entidad bancaria, el 40% de los créditos concedidos son para vivienda, el 50% se destinan a empresas, y el 10% son para consumo. Se sabe además que, de los créditos concedidos a vivienda, el 15% resultan impagados; de los créditos concedidos a empresas son impagados el 20%; y de los créditos concedidos al consumo resultan impagados el 15%.

a. Calcular la probabilidad de que un cierto crédito elegido al azar sea pagado.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado?



a.

$$\mathrm{P(P)} = \mathrm{P(V)} \cdot \mathrm{P(P/V)} + \mathrm{P(E)} \cdot \mathrm{P(P/E)} + \mathrm{P(C)} \cdot \mathrm{P(P/C)} =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}85 + 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}85 = 0{,}825$$

b.

$$\mathrm{P(C/P)} = \frac{\mathrm{P(C \cap P)}}{\mathrm{P(P)}} = \frac{\mathrm{P(C)} \cdot \mathrm{P(P/C)}}{\mathrm{P(P)}} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}85}{0'825} = 0{,}103$$

15. Un grupo de estudiantes financia su viaje de fin de curso con la venta de participaciones de lotería por importe de 1, 2 y 5 €. Han recaudado un total de 620 € y han vendido el doble de participaciones de un euro que de cinco euros. Si han vendido un total de 280 participaciones calcular el número de participaciones que han vendido de cada importe.

$$\begin{cases} x+2y+5z=620 \\ x+y+z=280 \\ x=5z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y+5z=620 \\ x+y+z=280 \\ x-5z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=120 \\ y=100 \\ z=60 \end{cases}$$

16. En una cierta población el consumo de agua (en m^3) en función de las horas del día, viene dado por

$$C(t)=\begin{cases} \frac{17}{9}\cdot t & \text{si } 0\le t<9 \\ at^2+bt-172 & \text{si } 9\le t<20 \\ 168-7t & \text{si } 20\le t<24 \end{cases}$$

Sabiendo que la función es continua en el intervalo (0,20), y que a las 15 horas se consigue el máximo consumo de agua, determina a y b.

Continua en $t=9$

$$\begin{cases} C(9)=81a+9b-172 \\ \lim_{t\to 9} C(t)=\begin{cases} \lim_{t\to 9^-}\frac{17}{9}t=17 \\ \lim_{t\to 9^+} at^2+bt-172=81a+9b-172 \end{cases} \end{cases} \rightarrow 81a+9b-172=17$$

A las 15h. se consigue el máximo consumo. $C'(15)=0\rightarrow 2a15+b=0\rightarrow b=-30a$

$$\begin{cases} 81a+9b-172=17 \\ b=-30a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=30 \end{cases}$$

17. Se sabe que el peso de los jugadores de la liga de fútbol profesional se distribuye según una normal de desviación típica de 6 Kg. Para estudiar el peso medio de los jugadores, se extrae una muestra de tamaño 8, obteniendo los siguientes resultados: 63,7; 48; 43,5; 65; 82; 70,3; 56,5; 50.

a. Calcular un intervalo de confianza a un nivel de significación del 10% para el peso medio de los jugadores.

b. ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para que con el mismo nivel de significación el error cometido en la estimación no exceda de 1,2 Kg?

a.

$\bar{x}=59{,}875$

$$\alpha=0{,}1\rightarrow\frac{\alpha}{2}=0{,}05\rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0{,}95\rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}65$$

$$\left(\bar{x}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{x}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(59{,}875-1{,}645\frac{6}{\sqrt{8}};59{,}875+1{,}645\frac{6}{\sqrt{8}}\right)=$$
$$=(56{,}37;63{,}37)$$

b.

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1{,}645 \cdot 6}{1{,}2}\right)^2 = 67{,}65 \rightarrow n > 67$$

18. Calcula una matriz X que satisface:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{9} & \mathbf{3} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} + \mathbf{2} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

Calcula si es posible la matriz inversa de X.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right]$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{|A|=6}^{-1} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow ADJ\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{ADJ\ A^t}{|A|} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 & 12 & 6 \\ 12 & 18 & 0 \\ 30 & 22 & 14 \end{pmatrix}$$

19. El rendimiento de los trabajadores de una fábrica (valorado en una escala de 0 a 100), durante una jornada de 8 horas, viene dada por la siguiente función:

$$\mathbf{r(t)} = \begin{cases} \mathbf{-10t^2 + 60t} & \mathbf{si\ 0 \leq t < 4} \\ \mathbf{80} & \mathbf{si\ 4 \leq t < 6} \\ \mathbf{170 - 15t} & \mathbf{si\ 6 \leq t \leq 8} \end{cases}$$ **, donde t es el tiempo en horas.**

a. Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. ¿cuál es el máximo rendimiento?

b. ¿En qué instantes la jornada laboral tiene un rendimiento situado a mitad de la escala?

$$r'(t) = \begin{cases} -20t + 60 & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ 0 & \text{si } 4 \leq t < 6 \\ -15 & \text{si } 6 \leq t \leq 8 \end{cases} \quad , r'(t) = 0 \rightarrow t = 3$$

t	r(t)
0	0
3	90
4	80
6	80
8	50

Crece de 0 a 3, decrece de 3 a 4, se mantiene de 4 a 6 y decrece de 6 a 8.
El máximo rendimiento se da a las 3 horas y vale 90.

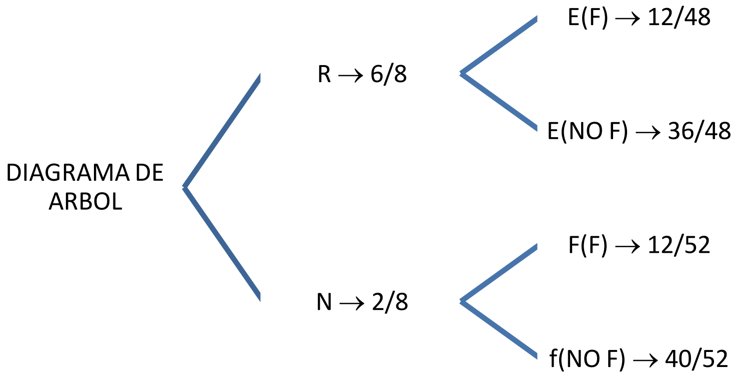
b. Mitad de tabla es nota = 50

$$\begin{cases} -10t^2 + 60t = 50 \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 5 \text{ (no sirve pues no está entre 0 y 4)} \end{cases} \\ 170 - 15t = 50 \rightarrow t = 8. \end{cases}$$

20. Una urna con 6 bolas rojas y 2 bolas negras. Se dispone además de una baraja española 48 cartas y una baraja francesa de 52 cartas. Se extrae una bola al azar. Si es roja, extraemos una carta de la baraja española. Si se extrae bola negra, extraemos una carta de la baraja francesa.

a. Calcule la probabilidad de que la carta extraída sea figura

b. Si la carta extraída es figura, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea roja?



$$a.\ P(\text{figura}) = \frac{6}{8}\cdot\frac{12}{48} + \frac{2}{8}\cdot\frac{12}{52} = \frac{51}{208}$$

$$b.\ P(R/\text{figura}) = \frac{P(R \cap \text{Figura})}{P(\text{Figura})} = \frac{\frac{6}{8}\cdot\frac{12}{48}}{\frac{51}{208}} = \frac{13}{17}$$

21. A lo largo de diferentes pruebas de acceso a la Universidad se ha observado que la distribución de las calificaciones en la asignatura de matemáticas sigue una ley normal de media 5,3 y desviación típica 0,8.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 49 alumnos tenga una media superior a 5,7?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar suspenda la asignatura de matemáticas?

a.

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(5{,}3, \frac{0{,}8}{\sqrt{49}}\right) = N\left(500; \frac{4}{35}\right)$$

$$P(\bar{x} \geq 5{,}7) = P\left(z \geq \frac{5{,}7 - 5{,}3}{\frac{4}{35}}\right) = P(z \geq 3{,}5) = 1 - \overbrace{P(z \leq 3{,}5)}^{0{,}9998} = 0{,}0002$$

b.

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(5{,}3, \frac{0{,}8}{1}\right) = N(500; 0{,}8)$$

$$P(x \leq 5) = P\left(z \leq \frac{5 - 5{,}3}{0{,}8}\right) = P(z \leq 0{,}38) = 0{,}6480$$

22. El administrador de la Comunidad de vecinos quiere saber que cobra a la hora un electricista, un fontanero y un albañil. Para ello sabe que en el cuarto B el electricista estuvo 1 hora y el albañil 2 horas y cobraron 78 euros de mano de obra. En el tercero A pagaron 85 euros por 2 horas del fontanero y 1 hora del albañil, y en el primero A por 1 hora de fontanero, 1 hora de electricista y 3 horas de albañil se han pagado 133 euros: ¿Qué cobra cada profesional?

$$\begin{cases} E + 2A = 78 \\ A + 2F = 85 \\ E + 3A + F = 133 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E = 28 \\ A = 25 \\ F = 30 \end{cases}$$

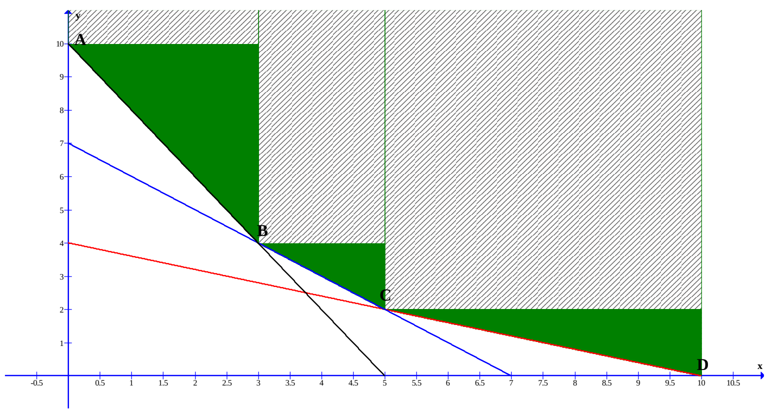
23. Dos grupos diferentes, G_1 y G_2, de la misma empresa, pueden realizar un proyecto de jardinería. Se trata de realizar el jardín de 3 zonas: A, B y C. En la tabla siguiente se recoge el N.º de unidades que puede realizar cada grupo durante una semana:

	ZONA A	ZONA B	ZONA C
GRUPO 1	4	10	7
GRUPO 2	10	5	7

Hay que realizar un mínimo de 40 unidades en la zona A, 50 unidades en la B y 49 unidades en la C. El coste semanal se estima en 3.300 € para el grupo G_1 y en 4.000 € para el grupo G_2. ¿Cuántas semanas habrán de trabajar cada grupo para acabar el proyecto con un coste mínimo?

Función a optimizar: Coste mínimo $= C(x, y) = 3300x + 4000y$

$$\text{Restricciones:} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + 10y \geq 40 \\ 10x + 5y \geq 50 \\ 7x + 7y \geq 49 \end{cases}$$



Punto A $(0, 10) \rightarrow C(A) = 40000$ €

Punto B$\rightarrow \begin{cases} 10x + 5y = 50 \\ 7x + 7y = 49 \end{cases} \rightarrow B(3, 4) \rightarrow C(B) = 25900€$

Punto C$\rightarrow \begin{cases} 4x + 10y = 40 \\ 7x + 7y = 49 \end{cases} \rightarrow C(5, 2) \rightarrow C(C) = 24500€$

Punto D $(10, 0) \rightarrow C(D) = 33000$ €
El número de semanas por grupo que minimiza los costes es G_1 5 semanas y G_2 2 semanas, con un coste mínimo de 24500 €.

24. Calcular:

a. $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$

b. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$

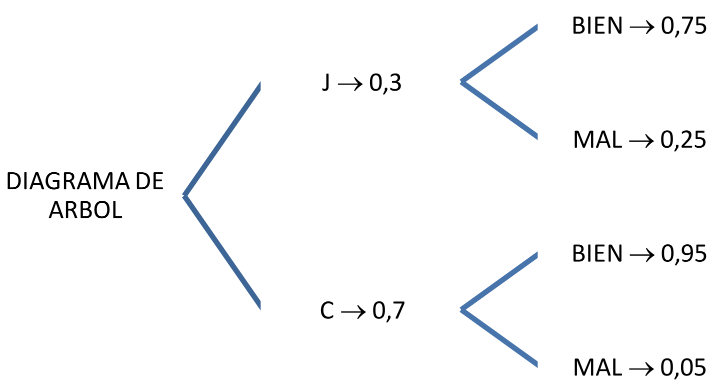
$$a. \int \frac{e^x+e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2}\int (e^x + e^{-x})\, dx = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) + c$$

$$b. \int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2}\int (e^x + e^{-x})\, dx = \left[\frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})\right]_0^{\ln 2} = \frac{3}{4}$$

25. Un restaurante tiene contratados dos camareros, Juan y Catalina, para atender el servicio de comedor. Catalina pone el servicio el 70% de los días y se confunde al colocar los cubiertos el 5% de los días que pone el servicio. Joan, por contra, coloca mal alguna pieza el 25% de los días que posa el servicio.

a. Esta mañana, el encargado del restaurante pasa revista al servicio: ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre algún servicio mal colocado?

b. Para desgracia, el encargado encuentra unos cubiertos mal colocados y desea saber la probabilidad de que haya sido Juan.



$$a.\ P(MAL) = P(J) \cdot P(MAL/J) + P(C) \cdot P(MAL/C) = 0{,}3 \cdot 0{,}25 + 0{,}7 \cdot 0{,}05 = 0{,}11$$

$$b.\ P(J/MAL) = \frac{P(J \cap MAL)}{P(MAL)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}25}{0{,}11} = 0{,}682$$

26. Hace un año una sociedad de capital de riesgo invirtió 100000 € en acciones de 3 empresas, que llamaremos A, B y C. Ahora, las acciones de la empresa A han aumentado de valor en un 50%, las de la empresa B han aumentado en un 10%, en cambio las de la empresa C han perdido un 15% de su valor. Si la sociedad ahora vendiera todas las acciones obtendría 102000 €. Sabiendo que invirtió en las acciones de la empresa C lo mismo que en las otras dos juntas.

a. Identifica las variables e interpreta el enunciado como un conjunto de ecuaciones lineales.

b. Calcula la cantidad de dinero que la sociedad invirtió en cada empresa.

a. $\begin{cases} A+B+C=100000 \\ \frac{150}{100}A+\frac{110}{100}B+\frac{85}{100}C=102000 \\ C=A+B \end{cases} \rightarrow$

27. En un taller se fabrican dos tipos de bolsas. Para hacer una bolsa del primer modelo se necesitan 0.9 m^2 de cuero y 8 horas de trabajo. Para el segundo modelo se necesitan 1.2 m^2 de cuero y 4 horas de trabajo. Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de 60 m^2 de cuero y puede dedicar uno de 400 horas de trabajo. El taller cobra 30 euros por una bolsa del primer modelo y 25 por una del segundo.

a. Plantead la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.

b. Dibuja la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c. Calculad el número de bolsas de cada tipo que se deben fabricar con el fin de obtener un beneficio máximo. Determinad también este beneficio máximo.

28. Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} \mathbf{x-ay+2z=0} \\ \mathbf{ax-4y-4z=0} \\ \mathbf{4x+3y-2z=0} \end{cases}$ dependiente del parámetro a.

a. Discute para que valores de a el sistema tiene solución y cuantas tiene en cada caso.

b. Hallar las soluciones para a = - 2.

29. Considera la función a trozos siguiente. $\begin{cases} \mathbf{x^2-3x+2} & \mathbf{si\ x<0} \\ \mathbf{x^3+ax+2} & \mathbf{si\ x>0} \end{cases}$.

a. Calcula los valores de a para los cueles la función es continua y derivable.

b. Para a = 4 calcula el área comprendida entre la gráfica de la función y las rectas x = 0 , x = 1 y y = 0.

30. El gasto mensual en euros de un trabajador en lotería viene determinado por su salario medio mediante la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{100x}{b+x^2}}$$

En que x ≥ 0 representa el salario en miles de euros y b > es un parámetro.

a. Hallar el valor de b para el cual el gasto máximo se da para un salario de 2000 €.

b. Para b = 9, determina el salario para el cual el gasto es máximo.

c. Para b = 9, para que salario el gasto mensual es superior a 10 €.

31. Si el precio de la entrada de un cine ́es de 8 euros, van 500 personas. El propietario sabe por experiencia que por cada aumento de 1.5 euros en el precio de la entrada van 30 espectadores menos. Hallar:

a. La función que determina el número de espectadores en función del precio de la entrada.

b. La función que determina los ingresos del cine en función del precio de la entrada.

c. El precio de la entrada para que los ingresos del propietario sean máximos.

d) El número de espectadores que irán al cine cuando el precio sea el que corresponde a los ingresos máximos y esos ingresos máximos.

32. La producción en kilogramos de naranjas por naranjo en Sóller sigue una distribución normal de desviación típica 2 y media desconocida.

a. Calculad el tamaño mínima de la muestra que se debe tomar para que, al estimar la media poblacional con un nivel de confianza del 94 %, el error sea inferior a 1.5 kg.

b. Si se coge una muestra aleatoria de 10 naranjos, con producciones en kilogramos: 30, 25, 4, 70, 45, 60, 21, 32, 9 y 47. Calcula un intervalo de confianza del 97 % para estimar la producción media de naranjas por árbol.

33. En una cierta empresa de exportación, el 62.5% de los empleados habla inglés. Por otro lado, entre los empleados que hablan inglés, el 80% habla también alemán. Entre los empleados que no hablan inglés, solo la tercera parte si que habla alemán.

a. ¿Qué porcentaje de empleados habla las dos lenguas?

b. ¿Qué porcentaje de empleados habla alemán?

c. Si un empleado no habla alemán, ¿cuál´es la probabilidad de que hable inglés?

34. Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ -mx + 2y + z = 2 \end{cases}$$

a. Discutir para que valores de m el sistema tiene solución, y cuantas tiene en cada caso.

b. Hallar la solución para m = 2.

35. Dadas las matrices:

$$X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$$

a. Hallar los valores de k para que la matriz Y sea invertible.

b. Hallar la inversa de Y para k = 1.

c. Hallar los valores de m y n para los cuales la matriz X verifica $X^2 - 4x + n\cdot Id = 0$

36. El dueño de una tienda de golosinas dispone de 10 paquetes de pipas, 30 de chicles y 18 de bombones. Decide que para venderlos mejor confeccionará dos tipos de paquetes, el tipo A está formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y lo venderá a 1,5 €. El tipo B está formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y lo venderá a 2 €.

a. Plantea la maximización de los beneficios de la tienda mediante un problema de programación lineal.

b. Dibuja la región factible de la solución indicando las rectas y los vértices que la delimitan.

c. Calcula el número de paquetes de tipo A y B que se han de confeccionar y vender para obtener un beneficio máximo.

37. Dada la función siguiente:

$$\mathbf{f(x)} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x-1}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x+3}}$$

a. Hallar el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b. Calcular una primitiva de f(x).
c. Calcular el área limitada por la curva y las rectas x = 4, x = 7 y y = 0

38. Una Academia de inglés cobra una cuota de 50€ mensuales y tiene 200 estudiantes. Un estudio de mercado afirma que por cada 2€ que suba (o baje) la cuota se pierden (o ganan) 10 estudiantes.

a. Escribe el número de estudiantes de la Academia en función del precio de la cuota.
b. Para que valor de la cuota la Academia se quedaría sin estudiantes.
c. ¿Determina en qué precio hay que fijar la cuota para obtener unos ingresos mensuales máximos? ¿cuáles serían estos ingresos y cuántos estudiantes tendría la Academia?

39. La evolución de la población de un estado, en millones de habitantes se puede aproximar mediante la función siguiente: $P(t) = 20 \cdot t^4 + t^2 + 40$, donde t es el tiempo en años.

a. Calcula la población actual.
b. Determina el límite de P(t) cuando t tiende a infinito.
c. Determina al cabo de cuántos años la población será máxima y el número de habitantes que la función predice para este máximo.

40. En una Universidad se ha observado que la distribución de las calificaciones de física en los estudios de ingeniería informática sigue una ley normal de media 5,1 y dedicación típica 1,6.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar obtenga una nota inferior a cuatro puntos?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 64 alumnos tenga una nota media superior a 5,9?
c. Si en un aula hay 50 alumnos ¿cuántos de estos alumnos es de esperar que tengan una nota superior a cuatro puntos?

41. De 2 sucesos de un mismo espacio muestral se sabe que: P(B/A) = 0,9; P(A/B) = 0,2 y P(A) = 0,1

a. Calcular $P(A \cap B)$ y P(B).
b. ¿Son A y B sucesos independientes?
c. Calcular $P(A \cap \textit{no } B)$