SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

ACADEMIA ALCOVER

SI TE GUSTAN LOS VÍDEOS PARA PREPARAR LOS EXÁMENES, COMPÁRTELOS CON TUS COMPAÑEROS Y AMIGOS.

ÉCHAME UNA MANO PARA QUE LA WEB CREZCA. CADA VEZ QUE MIRES UN VÍDEO DALE A ME GUSTA.

MATRICES.

OPERACIONES CON MATRICES. MATRIZ INVERSA. ECUACIONES Y SISTEMAS MATRICIALES. RANGO DE UNA MATRIZ.

Matriz: Colección ordenada de elementos colocados en filas y columnas.

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ matriz de tres filas(→) y tres columnas(↑). Es una matriz 3x3.

1. OPERACIONES.

a. Suma y resta.

Para sumar o restar matrices éstas deben tener el mismo número de filas y columnas. Se suman o restan los elementos correspondientes (misma situación en la matriz)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{no se pueden sumar.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -2 & -6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+4 & 4+5 \\ 2-2 & -1-6 & -3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -7 & -10 \end{pmatrix}$$

b. Multiplicar una matriz por un número real.

Se multiplica cada elemento de la matriz por dicho número.

$$3.\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 3 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -24 \\ 9 & 3 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$$

c. Producto de matrices.

$$(\mathrm{axb})(\mathrm{cxd}) \text{ se pueden multiplicar } \begin{cases} \text{si } b = c \\ \text{el resultado es (axd)} \end{cases}$$

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{(2x2)} . \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & -9 \end{pmatrix}}_{3x3}}_{\text{NO se pueden multiplicar}}$$

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}}_{(2x3)} . \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}}_{(3x2)}}_{\substack{\text{Se pueden multiplicar.} \\ \text{El resultado será (2x2).}}} = \begin{pmatrix} 1.2 + 2.(-3) + 3.(-6) & 1.6 + 2.4 + 3.0 \\ 3.2 + 4.(-3) + 6.(-6) & 3.6 + 4.4 + 6.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 14 \\ -42 & 34 \end{pmatrix}$$

EL PRODUCTO DE MATRICES NO ES CONMUTATIVO.

d. Cálculo de determinantes 2x2 y 3x3. Regla de Sarrus.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - c.b$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \underbrace{a.e.i + b.f.g + d.h.c}_{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} - \left(\underbrace{g.e.c + h.f.a + d.b.i}_{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} \right)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1).(-2) - 3.2 = -4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2.5.6 + 0 + 3.3.3 - (0 + (-3).3.2 + 0) = 105$$

1. Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-3} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

y k un parámetro real cualquiera.

- **a. Calcula la matriz A – kI**
- **b. Calcula la matriz (A – kI)^2.**
- **c. Calcula, si existen los valores del parámetro k para los que se satisface la relación (A – kI)^2 = B**

VER VÍDEO https://youtu.be/Jb9qvXK-SnE

a. A – kI $= \begin{pmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & 1-k & 0 \\ 1 & 0 & -k \end{pmatrix}$

b. (A – kI)$^2 = \begin{pmatrix} 2+k^2 & 1-2k & -2k \\ 1-2k & 2-2k+k^2 & 1 \\ -2k & 1 & 1+k^2 \end{pmatrix}$

c. k = 2

2. Determina todas las matrices de la forma A = $\begin{pmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{a^2+b^2} & \mathbf{c} \\ \mathbf{25} & \mathbf{-15} & \mathbf{2b+3a} \\ \mathbf{a+b} & \mathbf{-17} & \mathbf{21} \end{pmatrix}$ que sean simétricas.

VER VÍDEO https://youtu.be/afEShbZEE9I

a = - 3. b = -4 y c = - 7

a = - 63/13. B = - 16/13 y c = -79/13

3. Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-3} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$ y k un parámetro real cualquiera.

a. Calcula la matriz A – kI

b. Calcula la matriz (A – kI)^2.

c. Calcula, si existen los valores del parámetro k para los que se satisface la relación (A – kI)^2 = B

VER VÍDEO https://youtu.be/Jb9qvXK-SnE

a. A – kI $= \begin{pmatrix} -\mathrm{K} & 1 & 1 \\ 1 & 1-\mathrm{K} & 0 \\ 1 & 0 & -\mathrm{K} \end{pmatrix}$

b. (A – kI)$^2 = \begin{pmatrix} 2\mathrm{K}^2 & 1-2\mathrm{K} & -2\mathrm{K} \\ 1-2\mathrm{K} & 2-2\mathrm{K}+\mathrm{K}^2 & 1 \\ -2\mathrm{K} & 1 & 1+\mathrm{K}^2 \end{pmatrix}$

c. K = 2

4. Considera las matrices A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$

a. Calcula los determinantes de A y B.

b. Calcula la matriz producto B·A y la matriz (B·A)^t.

c. Para que se cumpla la relación A·X = B·A ¿cuántas filas y columnas ha de tener la matriz x?

d. Calcula la matriz x que satisface la relación A·X = B·A

VER VÍDEO https://youtu.be/_aHI0Z5YQiQ

a. |A| = - 2 y |B| = - 17

b. $B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $(B \cdot A)^t = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$

c. X = (2x2)

d. X $= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$

5. Dadas las matrices de la forma M = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{b} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$.

a. Calcula M^2.

b. Calcula a, b y c para que M^2 = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

VER VIDEO https://youtu.be/H-zsl5Ekfus

$$X^2=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ a+b=0 \\ b^2 = 1 \\ b+c=0 \\ c^2 = 1 \end{cases},$$

resulta:

a = 1, b = -1 y c = 1 o a = - 1, b = 1 y c = - 1. Las matrices son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Consideramos la matriz y los vectores siguientes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{y} \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \end{pmatrix}; \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{2y} \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{6-2y} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

Calcular x e y para que se verifique: B – AC = AD

VER VIDEO https://youtu.be/0IwhDtjZwiY

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} xy+2y^2 \\ 2y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x-2y^2-2y \\ -2y \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2-xy-2y^2 \\ \frac{3}{2}-2y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x-2xy-2y \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2-xy-2y^2 = 6x-2xy-2y \\ \frac{3}{2}-2y^2 = -2y \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{13}; y = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{9}; y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

7. Determina si existe una matriz simétrica tal que det(A) = - 7 y A · $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{-12} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

VER VÍDEO https://youtu.be/8tcK0__B6g

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Consideramos la matriz y los vectores siguientes:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}\end{pmatrix};\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\\mathbf{y}\end{pmatrix};\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}\ \mathbf{y}\ \mathbf{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{z}\\\mathbf{z}\\\mathbf{z}\end{pmatrix}$$

Calcular x e y para que se verifique: AB – 2C = D

VER VIDEO https://youtu.be/zQ48oRkA48k

$$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2x+y\\x+2y\\x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}2x+y-2\\x+2y-2\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}\begin{cases}2x+y-2=z\\x+2y-2=z\\x=z\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2x+y-z=2\\x+2y-z=2\\x-z=0\end{cases}$$

$x = 1; y = 1$ y $z = 1$

9. Determina una matriz simétrica X que verifique la ecuación matricial X·$\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix}$ y el determinante de la matriz 3·X sea igual a – 9.

VER VÍDEO https://youtu.be/RVj_UAE2dnM

$$X=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$$

10. Determina qué relaciones existen entre a, b, c y d para que se verifique A·M = M·A siendo A y M las matrices siguientes: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{-1}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$ y $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}&\mathbf{b}\\\mathbf{c}&\mathbf{d}\end{pmatrix}$

VER VIDEO https://youtu.be/4YqNGkoTqhU

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-c&-d\\a+c&b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&-a+b\\d&-c+d\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-c=b\\-d=-a+b\\a+c=d,\text{si }b=-c,\text{repetida}\\b+d=-c+d\text{ repetida}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}c=-b\\d=a-b\end{cases}\rightarrow M=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a-b\end{pmatrix}$$

11. Sea A la matriz siguiente A = $\begin{pmatrix}\mathbf{a}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{a}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{a}\end{pmatrix}$, donde a es un valor real. Calcula A^2, A^3 y A^4 y da una fórmula general para la expresión de A^n.

VER VIDEO https://youtu.be/bulx-rT42tU

$$A^2=\begin{pmatrix}a^2&0&0\\2a&a^2&0\\1&2a&a^2\end{pmatrix};A^3=\begin{pmatrix}a^3&0&0\\3a^2&a^3&0\\3a&3a^2&a^3\end{pmatrix}A^4=\begin{pmatrix}a^4&0&0\\4a^3&a^4&0\\6a^2&4a^3&a^4\end{pmatrix}$$

$$A^n=\begin{pmatrix}a^n&0&0\\na^{n-1}&a^n&0\\\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot a^{n-2}&na^{n-1}&a^n\end{pmatrix}$$

12. a. Sea A = $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ y+x & 7 & 7 \end{pmatrix}$ **y B =** $\begin{pmatrix} -1 & x+y & 1 \\ 3 & x+y+z & x+y+z \end{pmatrix}$ **dos matrices de orden 2x3 con x, y y z pertenecientes a R.**

a.1. Determinar el valor de x, y y z sabiendo que A = B.

a.2. ¿Es posible el cálculo a A·B? Razona la respuesta.

b. Dar un ejemplo de cada una de las siguientes matrices: matriz identidad, matriz simétrica y matriz diagonal que no sea la identidad.

VER VIDEO https://youtu.be/pqoT3GjSmVE

a.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ y+x & 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x+y & 1 \\ 3 & x+y+z & x+y+z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x+y+z=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3-\alpha \\ y=\alpha \\ z=4 \end{cases}$$

A·B = (2x3)·(2x3) no es posible pues el número de columnas de la primera matriz debe coincidir con el número de filas de la segunda.

b.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

13. Hallar la matriz simétrica que conmuta con A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

VER VIDEO https://youtu.be/CgcilyBy8q4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+2y & y+2z \\ 2x-y & 2y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & 2x-y \\ y+2z & 2y-z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2y=x+2y \\ y+2z=2x-y \\ 2x-y=y+2z \\ 2y-z=2y-z \end{cases} \rightarrow y=x-z \rightarrow \begin{pmatrix} x & x-z \\ x-z & z \end{pmatrix}$$

14. Hallar las matrices X tales que XA = AX, siendo A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**.**

VER VIDEO https://youtu.be/XtYOM6GtOwQ

Según las condiciones del problema la matriz X es 2x2. X = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x=x+z \\ x+y=y+t \\ z=z \\ z+t=t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=t \\ z=0 \end{cases}$$

Por tanto, la matriz X = $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$

15. Demostrar que, si A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$**, se verifica** A^2 **- (a+d)A + |A|I = 0, siendo|A| el determinante de A,**

I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i O = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

VER VIDEO https://youtu.be/LbEVeDvJrMo

$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$

$(a+d).A = (a+d). \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+da & ab+db \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix}$

$|A|.I = (ad-bc).\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$

$A^2 - (a+d)A + |A|I = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+da & ab+db \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = 0$

16. Una matriz cuadrada A es ortogonal si se verifica AA^t = I. ¿Para qué valores de a i b es ortogonal la matriz siguiente? A = $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & \sin b \\ 0 & -\sin b & \cos b \end{pmatrix}$

VER VIDEO https://youtu.be/eyXjxT0mY04

$A.A^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & \sin b \\ 0 & -\sin b & \cos b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & -\sin b \\ 0 & \sin b & \cos b \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 b + \text{sen}^2 b & -\text{senb}.\cos b + \text{senb}.\cos b \\ 0 & -\text{senb}.\cos b + \text{senb}.\cos b & \cos^2 b + \text{sen}^2 b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a^2 = 1$, $a = \pm 1$. El parámetro b puede tomar cualquier valor real.

17. Hallar todas las matrices reales 2x2 tales que la suma de los elementos de cada fila sea igual a 1 y la suma de los elementos de la primera columna sea igual a 0.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{cases} a+b=1 \\ c+d=1 \\ a+c=0 \end{cases}$ de donde $\begin{cases} b = 1-a \\ c = -a \\ d = 1-c = 1+a \end{cases}$, por tanto, la matriz A = $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$

18. Hallar todas las matrices reales tales que X $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ X.

VER VIDEO https://youtu.be/ihtw6Iz5-Fc

Según las condiciones del problema la matriz X es 2x2. X = $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} x+y & x-2y \\ z+t & z-2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x-2z & y-2y \end{pmatrix} \begin{cases} x+y=x+z \\ x-2y=y+t \\ z+t=x-2z \\ z-2t=y-2t \end{cases}$$

Por tanto, la matriz X = $\begin{pmatrix} t+3z & z \\ z & t \end{pmatrix}$

19. Una matriz 3x3 de números reales A = (a_{ij}) decimos que es triangular superior si a_{ij} = 0 siempre que i>j (es decir, si todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son = 0. Hallar las matrices triangulares superiores tales que verifiquen simultáneamente: A= $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **y**

A $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$**. ¿Hay alguna que sea invertible?**

VER VIDEO https://youtu.be/sv3YcFFu4Fc

Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$, la ecuación A$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$queda:

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{cases} a+b+c=0 \\ d+e=0 \\ f=0 \end{cases}$ y la ecuación A $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$queda:

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{cases} b+c=1 \\ d+e=0 \\ f=0 \end{cases}$. Resolviendo el sistema con las seis ecuaciones

obtenemos: $\begin{cases} a=-1 \\ b=1-c \\ d=-e \\ f=0 \end{cases}$. La matriz A queda: A = $\begin{pmatrix} -1 & 1-c & c \\ 0 & -e & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. El determinante de A es cero pues tiene una fila de ceros. Por tanto, A no tiene inversa.

20. Dar todas las matrices A tales que A $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **A. De estas matrices determina las que tienen la suma de todos sus elementos igual a cero.**

VER VIDEO https://youtu.be/3vSToTSTc-Q

Según las condiciones del problema la matriz X es 2x2. X = $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x+y & x \\ z+t & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x & y \end{pmatrix}, \begin{cases} x+y=x+z \\ x=y+t \\ z+t=x \\ z=y \end{cases} \begin{cases} x=z+t \\ y=z \end{cases}$$

Por tanto, la matriz X = $\begin{pmatrix} z+t & z \\ z & t \end{pmatrix}$

Suma de elementos igual a cero: z + t +z + z + t = 0 → t = (-3/2) z

21. Una matriz cuadrada se llama ortogonal si su inversa coincide con su traspuesta.

a.- Demostrar que la matriz A = $\begin{pmatrix}\cos x & -\text{senx}\\ \text{senx} & \cos x\end{pmatrix}$, x ∈ R, es ortogonal.

b.- Calcular x e y de manera que la matriz B = $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ sea ortogonal.

VER VIDEO https://youtu.be/NwH9HhevyME

a.- Si $A^{-1} = A^t$, multiplicando ambos miembros por A obtenemos $I = AA^t$. Diremos pues que A es ortogonal si $I = AA^t$

$A = \begin{pmatrix}\cos x & -\text{senx}\\ \text{senx} & \cos x\end{pmatrix}$ y $A^t = \begin{pmatrix}\cos x & \text{senx}\\ -\text{senx} & \cos x\end{pmatrix}$

$A.A^t = \left(\begin{matrix}\cos^2 x + \text{sen}^2 x & \cos x \,.\, \text{senx} - \text{sen}.\cos\,()\\ \text{senx}.\cos x - \cos x \,.\, \text{senx} & \cos^2 x + \text{sen}^2 x\end{matrix}\;\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$.Vemos, pues, que A es ortogonal ∀x ∈ $\Re$

b.- $B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ y $B^t = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & x & y\end{pmatrix}$

$$B.B^t = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1+x^2 & xy\\ 0 & xy & y^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}1+x^2 = 1\\ xy = 0\\ y^2 = 1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x = 0\\ y = \pm 1\end{cases}$$

22. Si A y B son matrices 3x3 de números reales y A es diagonal (es decir, $a_{ij} = 0$ siempre que i ≠j), ¿Podemos afirmar que AB = BA para cualquier matriz B? ¿Como podría ser A para que se cumpliera AB = BA para cualquier matriz B?

VER VIDEO https://youtu.be/0K4TtloxTr8

Sean $A = \begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & z\end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$. Efectuamos los productos A.B y B.A

$A.B = \begin{pmatrix}xa & xb & xc\\ yd & ye & yf\\ zg & zh & zi\end{pmatrix}$; $B.A = \begin{pmatrix}ax & by & cz\\ dx & ey & fz\\ gx & hy & iz\end{pmatrix}$, es evidente que A.B ≠ B.A

Si x = y = z, es decir, $A = \begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}$ entonces se cumple A.B = B.A

2. MATRIZ INVERSA.

Sea A una matriz cuadrada (mismas filas que columnas), diremos que A^{-1} es la inversa de A si se cumple que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \begin{cases} I_{2x2} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ I_{3x3} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ \ldots\end{cases}$

Una matriz A, cuadrada, tiene inversa ↔ |A|≠ 0

Menor complementario.

Dada una matriz cuadrada, el menor complementario de un elemento es el determinante que resulta de eliminar la fila y la columna a la que pertenece dicho elemento.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{cases} \text{Menor complementario de b} = \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} \\ \text{Menor complementario de i} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{cases}$$

Adjunto.

Dada una matriz cuadrada el adjunto de un elemento es su menor complementario multiplicado por (- 1)$^{\text{fila + columna}}$.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{cases} \text{Adjunto de b} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} \\ \text{Adjunto de i} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{cases}$$

a. Cálculo de la matriz inversa de una matriz 2x2.

a$_1$. Por la definición.

VER VIDEO https://youtu.be/U582jrCIm3Q

Invertir la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3z & 2y+3t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} 2x+3z = 1 \\ z = 0 \\ 2y+3t = 0 \\ t = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{-3}{2} \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a$_2$. Por el método de Gauss.

VER VIDEO https://youtu.be/Q5LzkMnAmUg

Ejemplo 1

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_1-3F_2}{\rightleftarrows} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Dividiendo la} \\ \text{primera fila} \\ \text{entre 2}}}{\rightleftarrows} \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \; \overbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 \end{matrix}}^{A^{-1}} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_2-3F_1}{\rightleftarrows} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_1+F_2}{\rightleftarrows} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Dividiendo la} \\ \text{primera fila} \\ \text{entre}-2}}{\rightleftarrows} \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \; \overbrace{\begin{matrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{matrix}}^{A^{-1}} \right)$$

$$\rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

a_3. Por el método de los adjuntos.

VER VIDEO https://youtu.be/cp6ivJ7i1PU

Hallamos el determinante de la matriz. Si es cero, no tiene inversa. Hallamos la traspuesta, la matriz de adjuntos y la dividimos por el determinante de A.

Ejemplo 1.

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix}\rightarrow|A|=\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}=2\rightarrow A^t=\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}\rightarrow \text{ADJ }A^t=\begin{pmatrix}1&-3\\0&2\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{\text{ADJ }A^t}{|A|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{-3}{2}\\0&1\end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\rightarrow|A|=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2\rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\rightarrow \text{ADJ }A^t=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{\text{ADJ }A^t}{|A|}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&\frac{-1}{2}\end{pmatrix}$$

b. Cálculo de la matriz inversa de una matriz 3x3.

b_1. Por la definición.

VER VIDEO https://youtu.be/kU2UD8hi_y0

Invertir la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&3\\-1&1&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&3\\-1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}d+2g&e+2h&f+2i\\a+3g&b+3h&c+3i\\-a+d&-b+e&-c+f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}d+2g=1\\a+3g=0\\-a+d=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=3\\d=3\\g=-1\end{cases}\\\begin{cases}e+2h=0\\b+3h=1\\-b+e=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}b=-2\\e=-2\\h=1\end{cases}\\\begin{cases}f+2i=0\\c+3i=0\\-c+f=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}c=-3\\f=-2\\i=1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2&-3\\3&-2&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

b_2. Por el método de Gauss.

VER VIDEO https://youtu.be/NO_mnURUtWA

$$\left(\begin{array}{ccc}\overbrace{\begin{matrix}0&1&2\\1&0&3\\-1&1&0\end{matrix}}^{A}&\overbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}^{I}\end{array}\right)\overset{\substack{\text{cambiamos}\\\text{f1 y f2}}}{\rightleftarrows}\begin{pmatrix}1&0&3&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\-1&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{\text{f3+f1}}{\rightleftarrows}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&1&3&0&1&1\end{pmatrix}\overset{f3-f2}{\rightleftarrows}\begin{pmatrix}1&0&3&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&1&-1&1&1\end{pmatrix}\overset{2f1-3f2}{\rightleftarrows}$$

$$\begin{pmatrix}2&-3&0&-3&2&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&1&-1&1&1\end{pmatrix}\overset{f2-2f3}{\rightleftarrows}\begin{pmatrix}2&-3&0&-3&2&0\\0&1&0&3&-2&-2\\0&0&1&-1&1&1\end{pmatrix}\overset{f1+3f2}{\rightleftarrows}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&0&6&-4&-6\\0&1&0&3&-2&-2\\0&0&1&-1&1&1\end{pmatrix}\overset{\text{Dividir f1 entre 2}}{\rightleftarrows}\left(\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{I}\quad\underbrace{\begin{matrix}3&-2&-3\\3&-2&-2\\-1&1&1\end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2&-3\\3&-2&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

b₃. Por el método de los adjuntos.

VER VIDEO https://youtu.be/rId_b4UeoJ0

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&3\\-1&1&0\end{pmatrix}\underset{|A|=-1}{\overset{A^t}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\2&3&0\end{pmatrix}\overset{\text{adj }A^t}{\rightleftarrows}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&1\\3&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\2&3\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&-1\\3&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&-1\\2&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\2&3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&-1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3&2&3\\-3&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}\overset{A^{-1}=\frac{\text{adj }A^t}{|A|}}{\rightleftarrows}A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2&-3\\3&-2&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

Otro ejemplo.

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&2\\3/2&2&1\end{pmatrix}\underset{|A|=-1}{\overset{A^t}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}2&0&3/2\\1&2&2\\0&2&1\end{pmatrix}\overset{\text{adj }A^t}{\rightleftarrows}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&2\\2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2\\0&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&3/2\\2&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&3/2\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&3/2\\2&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&3/2\\1&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&0\\1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&-1&2\\3&2&-4\\-3&-5/2&4\end{pmatrix}\overset{A^{-1}=\frac{\text{adj }A^t}{|A|}}{\rightleftarrows}A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\-3&-2&4\\3&5/2&-4\end{pmatrix}$$

23. Dadas las matrices:

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{m}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{3}\end{pmatrix},\ \mathbf{Y}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{2}\\\mathbf{2}&\mathbf{k}\end{pmatrix}$$

a. Hallar los valores de k para que la matriz Y sea invertible.

b. Hallar la inversa de Y para k = 1.

c. Hallar los valores de m y n para los cuales la matriz X verifica X^2 – 4x + n·Id = 0

VER VIDEO https://youtu.be/YD-BBhhBSOQ

a. Si k = - 4 no existe la inversa.

b. $\frac{-1}{5}\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

c. n = 3, m = 3 y n = 3, m = - 1

24. Considera las siguientes matrices: M = $\begin{pmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3k} \end{pmatrix}$ y N = $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{k} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$.

a. Razona si es posible calcular M·N y M^2. si lo es, calcúlalas.

b. Calcula para qué valores de k la matriz M·N es invertible.

c. Calcula la inversa de M·N para a = - 1.

d. Para k = 1, halla la matriz X que cumple (M·N)·X = $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

25. Calcula, si existe, el valor de k para que la matriz B = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{k} & \mathbf{k+1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ sea la matriz inversa de A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k} & \mathbf{k} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

VER VÍDEO https://youtu.be/u_5A74mGZo8

K = 2

26. Considera la matriz A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{a-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3a} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a. Encuentra los valores de a para los cuales la matriz A es invertible.

b. Para a = 1 resuelve, si es posible el sistema A·X = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$

VER VÍDEO https://youtu.be/oBH4KVQwIy0

a. a = 0 y A = - 1

b. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

27. Sea A una matriz invertible nxn con coeficientes reales tal que cumple la igualdad A^2 + A = I

a. Calcular la inversa de A.

b. Comprobar que se satisface la igualdad A·(B + A) – I = A·(B -I), siendo B una matriz cuadrada cualquiera 2x2.

c. ¿Satisface la matriz M = $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ las condiciones del enunciado?

VER VÍDEO https://youtu.be/b2K5QMZiJy4

a. A^{-1} = A – I

c. M cumple las condiciones del enunciado.

28. Considera la matriz siguiente:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-5}\\ \mathbf{4} & \mathbf{x+2} & \mathbf{x^2}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-3}\end{pmatrix}$$

Se pregunta:

a. Resuelve la ecuación |A| = 0

b. Si x = 0, ¿tiene inversa la matriz A?

c. Si x = 2, ¿tiene inversa la matriz A? En caso afirmativo resuelve la ecuación A·Z = I

VER VIDEO https://youtu.be/SXU-ZGXy2K4

a.

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & -5\\ 4 & x+2 & x^2\\ -1 & 1 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4 & -8\\ 4 & x+6 & x^2-12\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}4 & -8\\ x+6 & x^2-12\end{vmatrix}=$$

$$-1\cdot(4x^2-48+8x+48)=0;4x^2+8x=0;x\cdot(4x+8)=0;\ \begin{cases}x=0\\ x=-2\end{cases}$$

b.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 4 & 2 & 0\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix};\ |A|=0;A\text{ no tiene inversa.}$$

c.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 4 & 4 & 4\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix};\ |A|=-32\neq 0;A\text{ si tiene inversa.}$$

$$A\cdot Z=I;Z=A^{-1}\cdot I=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{8} & -1\\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

29. Escribe todas las matrices de la forma A = $\begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{b} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c}\end{pmatrix}$ **que sean inversas de ella misma.**

VER VÍDEO https://youtu.be/-haFLJHX4zI

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

30. a. Dadas A, una matriz invertible cualquiera, y A $^{-1}$ **la inversa, ¿Qué matriz se obtiene al calcular A·A**$^{-1}$ **y A**$^{-1}$**·A?**

b. Considera la matriz $\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{x}\\ \mathbf{0} & \mathbf{x+2}\end{pmatrix}$

i. Calcular los valores de x que satisfacen A^{2} **= 2·A**

ii. Si x = - 1, calcula A^{-1} **y comprueba el resultado calculando A·A**$^{-1}$**.**

VER VIDEO https://youtu.be/ptQCTlM9J3c

a. Por definición de matriz inversa los productos $A\cdot A^{-1}$ y $A^{-1}\cdot A$ dan la identidad I.

b.

$$A^2 = 2A;\ \begin{pmatrix}2 & x\\ 0 & x+2\end{pmatrix}^2 = 2\cdot\begin{pmatrix}2 & x\\ 0 & x+2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}4 & x^2+4x\\ 0 & (x+2)^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2x\\ 0 & 2x+4\end{pmatrix};$$

$$x^2+2x=0\begin{cases}x=0\\ x=-2\end{cases}$$

$$\overbrace{A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}^{|A|=2};\ A^t=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix};\ AdjA^t=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix};\ A^{-1}=\frac{AdjA^t}{|A|}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

31. Considera la matriz $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{a}\\ \mathbf{a+1} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$ **y el vector** $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}$**.**

a. Indica para que valores de a la matriz M es invertible.

b. Calcula para los valores de a que sea posible la matriz inversa de M.

c. Calcula, para a = 0, el vector x tal que M·x = b

VER VÍDEO https://youtu.be/Lp3z4rdSapE

a. $a=\pm\sqrt{2}$

b. $M^{-1}=\frac{1}{a^2-2}\begin{pmatrix}-1 & -1+a & -2\\ -a & 2-a & a^2+a-2\\ a+1 & -1 & -a-1\end{pmatrix}$

c. $x=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

32. Considerar las matrices siguientes:

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{2} & \mathbf{k}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{k} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$**, Dónde k es un parámetro real.**

a. Calcular A·B y determinar en función de los valores reales de k si la matriz A·B tiene inversa.

b. Estudia lo mismo que en el apartado a pero con la matriz B·A.

c. Para k = - 2, calcula la inversa de B·A

VER VIDEO https://youtu.be/pVWsxXDOiSQ

a.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & 0 & -1\\ 3k & k & 2k-2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}k & 0 & -1\\ 3k & k & 2k-2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\rightarrow$ La matriz $A\cdot B$ tiene inversa para todo k.

b.

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}k & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & -1\\ 3 & k+2\end{pmatrix}$$

$|B\cdot A| = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = k^2+2k+3=0 \rightarrow$ No tiene solución real →
→ B · A no tiene inversa.

c.

$$(B\cdot A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

33. Calcula una matriz X que satisface:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{9} & \mathbf{3} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} + \mathbf{2} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

Calcula si es posible la matriz inversa de X.

VER VIDEO https://youtu.be/_2XMtoPuHkI

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \right]$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{|A|=6}^{-1} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ADJ } A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{\text{ADJ } A^t}{|A|} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 15 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 & 12 & 6 \\ 12 & 18 & 0 \\ 30 & 30 & 14 \end{pmatrix}$$

34. Consideramos la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-m} \end{pmatrix}$

a. Determinar para que valores de m existe $\mathbf{A^{-1}}$**.**

b. Calcula $\mathbf{A^{-1}}$ **para m = 2.**

c. Resuelve para m = 2 el sistema: $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$**.**

VER VIDEO https://youtu.be/hwq-hoDEZd8

a.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}; \ |A| = -m^2+m+1=0 \rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Si $m \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ a si tiene inversa.

b.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&-1\\1&1&-2\end{pmatrix};\ |A|=-1$$

$$A^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\rightarrow \text{ADJ } A^t=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\-1&-2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\-1&-2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&2\\-1&-1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\-1&-2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\-1&-2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\-1&-1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3&-1&2\\-1&-1&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{\text{ADJ } A^t}{|A|}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-2\end{pmatrix}$$

c.

$$A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

35. a. Comprobar si la matriz inversa de A coincide con su traspuesta.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

b. Determinar en el caso en que sea posible la solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&k&1\\0&1&\frac{k}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

VER VIDEO https://youtu.be/-oJFeqbkaa4

a. Debe cumplirse que $A\cdot A^t=I\rightarrow\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

b. Se trata de un sistema homogéneo, los términos independientes son cero. Si el rango de A es 3 ($|A|\neq 0$) tendrá la llamada solución trivial, $x=0$, $y=0$ y $z=0$; si es menor que 3 ($|A|=0$), tiene infinitas soluciones.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&k&1\\0&1&\frac{k}{2}\end{pmatrix};\ |A|=\frac{k^2}{2}-\frac{k}{2}-1=0\rightarrow k^2-k-2=0\rightarrow\begin{cases}k=2\\k=-1\end{cases}$$

Si $k\neq 2$ y $k\neq -1\rightarrow |A|\neq 0\rightarrow$ Solución trivial.
Si $k=2$ o $k=-1\rightarrow |A|=0\rightarrow$ Infinitas soluciones.

36. Determinar la forma de las matrices A = $\begin{pmatrix}-a&b\\-b&a\end{pmatrix}$ que no admiten inversa. Escribe un ejemplo.

VER VIDEO https://youtu.be/_7Y5H4VkmgM

A no tiene inversa si su determinante es cero.

$$A=\begin{pmatrix}-a & b\\ -b & a\end{pmatrix};\ |A|=-a^2+b^2=0;\ a^2=b^2;\ \begin{cases}a=b\\ a=-b\end{cases};\ A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

37. Determina el valor de a para que la matriz tenga inversa. Calcularla para a = 1.

$$\mathbf{A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & a\end{pmatrix}.}$$

VER VIDEO https://youtu.be/jiRr1sAYNGE

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & a\end{pmatrix};\ |A|=2a+18+15-(12+3a+15)=-a+6=0; a=6$$

$$\begin{cases}\text{Si } a=6 \text{ la matriz A NO tiene inversa.}\\ \text{Si } a\neq 6 \text{ la matriz A SI tiene inversa.}\end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}^{-1}}_{|A|=5}\rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 5\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}\rightarrow ADJ\ A^t=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 5\\ 3 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-13 & 12 & 3\\ 5 & -5 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{ADJ\ A^t}{|A|}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-13 & 12 & 3\\ 5 & -5 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

38. Demostrar que si una matriz cuadrada A cumple A^2 – 3A – 2I = 0, entonces A tiene inversa. Calcular la inversa en función de A y de I.

VER VIDEO https://youtu.be/ie9ldEit_No

$$A^2-3A-2I=0;\ A^2-3A=2I;\ \begin{cases}A\cdot(A-3I)=2I\\ (A-3I)\cdot A=2I\end{cases};\ \begin{cases}A\cdot\overbrace{\left[\frac{1}{2}\cdot(A-3I)\right]}^{B}=I\\ \overbrace{\left[\frac{1}{2}\cdot(A-3I)\right]}^{B}\cdot A=I\end{cases}$$

Según la definición de inversa si A·B = B·A = I entonces B es la inversa de A.

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot(A-3I)$$

39. Se considera el conjunto, llamémosle M, de las matrices 3x3 tales que en cada fila y en cada columna tienen dos ceros y un uno.

a.- Escribe todas las matrices del conjunto M.

b.- Demuestra que todas las matrices de M tienen inversa.

a.- Las matrices del conjunto M son:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b.- Todas las matrices de M son cuadradas y sus determinantes son distintos de 0. Todas tienen inversa.

40. A cada matriz real A = $\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$ le asociamos el polinomio p(x) = x^2 – (a+d)x +|A|, donde |A| indica el determinante de A. Diremos que p(x) es el polinomio característico de la matriz A. Se pregunta:

a.- Hallar una matriz que tenga cómo polinomio característico p(x) = x^2 + x + 1. ¿Cuántas matrices hay con este polinomio característico?

b.-Si A tiene inversa demostrar que el polinomio característico de la inversa, A^{-1}, es p(x) = x^2 - $\frac{\mathbf{a+d}}{\mathbf{|A|}}\mathbf{x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{|A|}}$

VER VIDEO https://youtu.be/CwAM24kG7Vo

a. Comparando p(x) = x² – (a+d)x +|A| con p(x) = x² + x + 1: $\begin{cases} -(a+d) = 1 \\ |A| = 1 \end{cases}$ es decir, $\begin{cases} -(a+d) = 1 \\ ad - bc = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a = -1 - d \\ b = \frac{ad-1}{c} = \frac{(-1-d)d-1}{c} \end{cases}$, por tanto, $A = \begin{pmatrix} -1-d & \frac{(-1-d)d-1}{c} \\ c & d \end{pmatrix}$

Hay infinitas matrices posibles. En todo caso c debe ser distinta de cero.

Calculamos A^{-1}. |A| = ad – bc. A^t= $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Matriz de adjuntos de A^t = $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ y la dividimos por |A|. A^{-1} = $\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$.

El polinomio es: p(x) = $x^2 - \left(\frac{a}{ad-bc} + \frac{d}{ad-bc}\right)x + |A^{-1}| = x^2 - \frac{a+d}{|A|}x + \frac{1}{|A|}$

41. a) Calcular todas las matrices 2x2 de la forma A = $\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{1} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$ que satisfacen A^2 = 0.

b) Demostrar que las matrices del apartado anterior no son invertibles.

VER VIDEO https://youtu.be/HLO99agw0QE

a.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b & a.b + b.d \\ a + d & b + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} a^2 + b = 0 \\ a.b + b.d = 0 \\ a + d = 0 \\ b + d^2 = 0 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} a = -d \\ b = -d^2 \end{cases} \to A = \begin{pmatrix} -d & -d^2 \\ 1 & d \end{pmatrix}$$

b. Para que una matriz cuadrada tenga inversa su determinante debe ser distinto de 0.

$|A| = -d^2 + d^2 = 0 \to$ Las matrices del tipo A no tienen inversa.

42. a) Calcular todas las matrices 2x2 de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & -2-a \end{pmatrix}$ que satisfacen $A^2 + 2.A + 3.I = 0$, donde I es la matriz identidad. O sea, calcular de c en función de a.

b) Demostrar que las matrices del apartado anterior tienen inversa y calcularla.

VER VIDEO https://youtu.be/FIQdvzKp7QQ

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & -2-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & -2-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c & -2 \\ -2c & c+(2+a)^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2.A + 3.I = 0; \begin{pmatrix} a^2+c & -2 \\ -2c & c+(2+a)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 2 \\ 2c & -4-2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a^2+2a+c+3 & 0 \\ 0 & a^2+2a+c+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; a^2+2a+c+3 = 0;$$

$$c = -a^2-2a-3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -a^2-2a-3 & -2-a \end{pmatrix}$$

b) $|A| = 3 \neq 0 \rightarrow$ A tiene inversa.

$$A^2 + 2.A + 3.I = 0 \quad \xrightarrow{\substack{\text{multiplicando} \\ \text{ambos miembros} \\ \text{por } A^{-1}}} \quad A + 2.I + 3.A^{-1} = 0 \quad \xrightarrow{\text{despejando}}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{3}(A + 2.I).$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -a^2-2a-3 & -a \end{pmatrix}$$

43. Sabemos que una matriz cuadrada A tiene inversa B. Si se verifica AB = I (I es la matriz de identidad). Demostrar que si una matriz verifica $A^2 = 0$ (0 es la matriz nula), A no puede tener inversa.

VER VIDEO https://youtu.be/AOGFdfqKWq4

Si AB = I$\rightarrow |AB| = |I| \rightarrow$ $|AB| = 1 \rightarrow |A|.|B| = 1, |B| = \frac{1}{|A|}$ ⇒Si una matriz A tiene inversa B, el |A| debe ser distinto de 0. Si $A^2 = 0 \rightarrow |A^2| = 0 \rightarrow |A|^2 = 0 \rightarrow |A| = 0$ →A no tiene inversa.

44. Calcula los valores de m para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & m & 2 \\ 3/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

Para m = 2 calcula, si es posible, la inversa de A y resuelve el sistema de ecuaciones $A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

VER VIDEO https://youtu.be/G0B5OKzN8pQ

Si m = 1 o m = 3 la matriz no tiene inversa.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 3 & 5/2 & -4 \end{pmatrix}. \text{ Si m = 2, } |A| \neq 0 \rightarrow \text{ solución trivial: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

45. a. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ calcula los valores de a para los que la matriz $A^2 - A$ no tiene inversa.

b. Suponiendo que a = 1, halla todas las matrices X que satisfacen AX + I = A

a)

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a+2)^2 + a - 1 & (a+2)(a-1) + a^2 - a \\ a + 2 + a & a - 1 + a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + 5a + 3 & 2a^2 - 2 \\ 2a + 2 & a - 1 + a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 4a + 1 & 2a^2 - a - 1 \\ 2a + 1 & a^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$|A^2 - A| = \begin{vmatrix} a^2 + 4a + 1 & 2a^2 - a - 1 \\ 2a + 1 & a^2 - 1 \end{vmatrix} = a^4 - a = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Si a ≠ 0 y a ≠ 1 la matriz $A^2 - A$ si tiene inversa.

Si a = 0 o a = 1 la matriz $A^2 - A$ no tiene inversa.

b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3x & 3y \\ x+z & y+t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3x+1 & 3y \\ x+z & y+t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 3 \\ 3y = 0 \\ z + x = 1 \\ y + t + 1 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{3} \\ t = 0 \end{cases} \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Otra forma de resolverlo:

$$\left.\begin{matrix} A.X + I = A \rightarrow A.X = A - I \rightarrow X = A^{-1}(A - I) \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A^t} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adj } A^t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A^{-1} = \frac{\text{Adj } A^t}{|A|}} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \rightarrow X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

3. ECUACIONES Y SISTEMAS MATRICIALES.

46. Despejar X en cada ecuación.

a. X·A + B = C

b. AX + BX = C

c. AX + 3X = C

d. $(AX + B)^{-1} = C$

VER VIDEO https://youtu.be/_0W5knYefbM

$$X \cdot A + B = C;\ \overbrace{X \cdot A = C - B}^{\substack{\text{Multiplicamos.} \\ \text{por la derecha,} \\ \text{ambos miembros} \\ \text{por } A^{-1}}};\ X \cdot \overbrace{A \cdot A^{-1}}^{\text{Identidad}} = (C - B) \cdot A^{-1};\ X = (C - B) \cdot A^{-1}$$

$$\overbrace{\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}+\mathrm{B}\cdot\mathrm{X}=\mathrm{C}}^{\substack{\text{Sacamos factor común}\\ \text{X por la derecha.}}}\ ;\ \overbrace{(\mathrm{A}+\mathrm{B})\cdot\mathrm{X}=\mathrm{C}}^{\substack{\text{Multiplicamos.}\\ \text{por la izquierda,}\\ \text{ambos miembros}\\ \text{por (A+B)}^{-1}}}\ ;\ \overbrace{(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{-1}\cdot(\mathrm{A}+\mathrm{B})}^{\text{Identidad}}\cdot\mathrm{X}=(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{-1}\cdot\mathrm{C}$$

$$\mathrm{X}=(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{-1}\cdot\mathrm{C}$$

$$\overbrace{\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}+3\cdot\mathrm{X}=\mathrm{C}}^{\substack{\text{Sacamos factor común}\\ \text{X por la derecha.}}}\ ;\ \overbrace{(\mathrm{A}+3\mathrm{I})\cdot\mathrm{X}=\mathrm{C}}^{\substack{\text{Multiplicamos.}\\ \text{por la izquierda,}\\ \text{ambos miembros}\\ \text{por (A+B)}^{-1}}}\ ;\ \overbrace{(\mathrm{A}+3\mathrm{I})^{-1}\cdot(\mathrm{A}+3\mathrm{I})}^{\text{Identidad}}\cdot\mathrm{X}=(\mathrm{A}+3\mathrm{I})^{-1}\cdot\mathrm{C}$$

$$\mathrm{X}=(\mathrm{A}+3\mathrm{I})^{-1}\cdot\mathrm{C}$$

$$(\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}+\mathrm{B})^{-1}=\mathrm{C};\ \mathrm{A}\cdot\mathrm{X}+\mathrm{B}=\mathrm{C}^{-1};\ \overbrace{\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}=\mathrm{C}^{-1}-\mathrm{B}}^{\substack{\text{Multiplicamos.}\\ \text{por la izquierda,}\\ \text{ambos miembros}\\ \text{por A}^{-1}}}\ ;\ \mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\cdot(\mathrm{C}^{-1}-\mathrm{B})$$

$$X=A^{-1}\cdot(C^{-1}-B)$$

47. Dada la ecuación matricial M·X + N = P con M = $\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{a}\\ \mathbf{a} & \mathbf{a}\end{pmatrix}$, $\mathbf{N}=\begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{4}\\ \mathbf{3} & \mathbf{4}\end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{5} & \mathbf{6}\\ \mathbf{3} & \mathbf{4}\end{pmatrix}$

a. ¿Para qué valores del parámetro a existe la inversa de M?

b. Calcula la matriz inversa de M.

c. Para a = 2, resuelve la ecuación matricial, si es posible.

d. Para los valores de a, para los cuales existe la matriz inversa, resuelve la ecuación matricial.

VER VÍDEO https://youtu.be/o6pknf78YXQ

48. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$**, calcula, si existe, la matriz X que satisface la ecuación** $\mathbf{(X + A)^{-1} = A}$

VER VÍDEO https://youtu.be/s-TClGLjciM

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

49. Sea la matriz A = $\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$.

a. Calcula $\mathbf{A^t}$**,** $\mathbf{A^2}$ **y** $\mathbf{A^{-1}}$**.**

b. Sea I la matriz identidad. Resuelve la ecuación :

$$\mathbf{A^2-2\cdot A\cdot X+I=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}}$$

c. Calcula todas las matrices B para las cuales se tiene que A·B = B·$\mathbf{A^t}$**.**

VER VÍDEO https://youtu.be/am-xPn4lY1A

a. $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

b. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

c. $B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & 2x \end{pmatrix}$.

50. Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

a. Calcula A^t, A^2 y A^{-1}.

b. Resuelve la ecuación $A^2 - 2AX + I =$ $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$

c. Calcula todas las matrices B para las cuales se cumple: $A{\cdot}B = B{\cdot}A^t$

VER VÍDEO https://youtu.be/ikcG6lYKdmw

51. Se consideran las matrices A y B: $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$

a. Calcula los determinantes de A y B.

b. Calcula la matriz producto B·A y la matriz traspuesta $(B{\cdot}A)^t$.

c. Para que se cumpla la relación A·X = A·B ¿cuántas filas y columnas a detener la matriz X?

d. Calcula la matriz X que satisface la relación A·X = A·B.

VER VÍDEO https://youtu.be/azPlYtqAIeU

a. |A| = - 2 y |B| = - 17

b. $B{\cdot}A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ y $(B \cdot A)^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

c. La matriz A es una matriz 2x2.

d. X = B

52. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y\ B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

a. Calcular A^2 y A^3.

b. Proponer una fórmula para A^n y utilizarla para calcular A^{14}.

c. Resolver la ecuación matricial: $A{\cdot}X + 1/5\, B^t{\cdot}B = 2A$

53. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$**, calcula, si existe, la matriz X que satisface la ecuación A + X = X·A**

VER VÍDEO https://youtu.be/fKbJDuKiabs

a. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

54. Considera las matrices A = $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ **y B =** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$**, y sea O la matriz nula 2x2.**

a. Calcula todas las matrices X tales que AX – X = B.

b. Halla una matriz Y, diferente de O, tal que (A – B)·Y = O.

c. Indica todas las matrices Z que cumplen que A·Z = O.

VER VÍDEO https://youtu.be/gLPwpt7NAOE

a. $\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

55. Resolver la ecuación matricial AX + B = I, siendo A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **y B =** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **de dos formas distintas.**

VER VIDEO https://youtu.be/nPASjtsalMI

VER VIDEO https://youtu.be/pSoG41DcAhU

$$\mathrm{AX + B = I};\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} x+2z+2 & y+2t-1 \\ z+3 & t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2z+2=1 \\ z+3=0 \\ y+2t-1=0 \\ t+1=1 \end{cases} \begin{cases} x=5 \\ y=1 \\ z=-3 \\ t=0 \end{cases}$$

$$\mathrm{AX + B = I;\ AX = I - B;\ A^{-1}AX = A^{-1}(I-B);\ X = A^{-1}(I-B)}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

56. Resolver el sistema $\begin{cases} \mathbf{2X + 3Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{1} \\ \mathbf{9} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \\ \mathbf{3X - Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{7} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \end{cases}$.

VER VÍDEO https://youtu.be/2kNE3mQzy6o

$$\begin{cases} 2X+3Y = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix} \\ 3X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \end{cases};\ \begin{cases} 2X+3Y = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix} \\ 9X - 3Y = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ -9 & 12 \end{pmatrix} \end{cases};\ 11X = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ 0 & 11 \end{pmatrix};\ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot Y = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix};\ 3 \cdot Y = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};\ 3 \cdot Y = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & -3 \end{pmatrix};$$

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

57. Calcula una matriz X que satisface:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{9} & \mathbf{3} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} + \mathbf{2} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

Calcula si es posible la matriz inversa de X.

VER VIDEO https://youtu.be/_2XMtoPuHkI

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}^{-1}\cdot\left[\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\9&3&-3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&0\\3&4&5\end{pmatrix}\right]$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}^{-1}}_{|A|=6}\rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\rightarrow \mathrm{ADJ}\ A^t=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&0\\0&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\0&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&2\\0&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&0\\0&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\0&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&0\\2&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{\mathrm{ADJ}\ A^t}{|A|}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&1\\4&6&0\\15&15&7\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}18&12&6\\12&18&0\\30&30&14\end{pmatrix}$$

58. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-5\\-3&1\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}3&-1\\1&0\end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&5\end{pmatrix}$

a. Calcular A^2 – B·C^t.

b. Resolver la ecuación matricial A·X + B = C.

VER VIDEO https://youtu.be/C8P13qLf9iI

a.

$$A^2-BC^t=\begin{pmatrix}2&-5\\-3&1\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}3&-1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\-1&5\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-1&5\\-1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-8\\2&5\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-2&13\\-3&-1\end{pmatrix}$$

b.

$$AX+B=C\rightarrow AX=C-B\rightarrow X=A^{-1}(C-B)=\begin{pmatrix}2&-5\\-3&1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-2&3\\-2&5\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}3&-5\\1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&3\\-2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-11\\0&-5\end{pmatrix}$$

59. Calcula la matriz X tal que A·X·A = B. A = $\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$ **y B =** $\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{3}&\mathbf{3}\\\mathbf{2}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\\\mathbf{3}&\mathbf{0}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$.

VER VIDEO https://youtu.be/7JKD3Jna2qs

$$A\cdot X\cdot A=B\rightarrow X=A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&1\\2&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0&3&3\\2&2&0\\3&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&1\\2&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}=$$
$$=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-2&-1&8\\-4&3&-4\end{pmatrix}$$

60. a. Dadas las matrices: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&2\\2&4\end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&5\\-3&1\end{pmatrix}$ **resolver la ecuación matricial AX + B^t = B.**

b. Dar un ejemplo de las matrices siguientes.

- **b.1. Matriz fila con tres columnas.**
- **b.2. Matriz columna con tres filas.**
- **b.3. Matriz de dimensión 3x2.**
- **b.4. Matriz simétrica de dimensión 3x3.**

VER VIDEO

a. $AX + B^t = B \rightarrow AX = B - B^t \rightarrow X = A^{-1} \cdot (B - B^t) =$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^t \right) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

b. $(1 \quad 2 \quad 3); \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \; y \; \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

61. **a. Demostrar que la ecuación matricial A·B – A = C no tiene solución.**

B = $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$**, C =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

b. Resolver la ecuación matricial anterior tomando:

B = $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$**, C =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$**.**

VER VIDEO https://youtu.be/H4CvmCjuZTw

a.

$$AB - A = C; A(B - I) = C; |A(B - I)| = |C|; \; |A| \cdot \overbrace{|B - I|}^{0} = \overbrace{|C|}^{-2} \rightarrow 0 = -2 \text{ absurdo.}$$

b.

$$AB - A = C; A \cdot (B - I) = C; A = C \cdot (B - I)^{-1}; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

62. Se consideran las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$**. Calcula la matriz X que verifica: XA + I = B.**

VER VÍDEO https://youtu.be/6WtJwZrnTlg

$$X = (B - I).A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

63. **a. Dada la matriz A =** $\begin{pmatrix} \mathbf{a+2} & \mathbf{a-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$ **calcula los valores de a para los que la matriz** A^2 **– A no tiene inversa.**

b. Suponiendo que a = 1, halla todas las matrices X que satisfacen AX + I = A

a)

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a+2)^2 + a - 1 & (a+2)(a-1) + a^2 - a \\ a+2+a & a-1+a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a^2+5a+3 & 2a^2-2 \\ 2a+2 & a-1+a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+4a+1 & 2a^2-a-1 \\ 2a+1 & a^2-1 \end{pmatrix}$$

$$|A^2 - A| = \begin{vmatrix} a^2+4a+1 & 2a^2-a-1 \\ 2a+1 & a^2-1 \end{vmatrix} = a^4 - a = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Si a ≠ 0 y a ≠ 1 la matriz $A^2 - A$ si tiene inversa.

Si a = 0 o a = 1 la matriz $A^2 - A$ no tiene inversa.

b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3x & 3y \\ x+z & y+t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 3x+1 & 3y \\ x+z & y+t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 3x+1 = 3 \\ 3y = 0 \\ z+x = 1 \\ y+t+1 = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{3} \\ t = 0 \end{cases} \to X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Otra forma de resolverlo:

$$\left.\begin{array}{l} A.X + I = A \to A.X = A - I \to X = A^{-1}(A - I) \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{A^t}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{Adj\ A^t}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{A^{-1}=\frac{Adj\ A^t}{|A|}}{\rightsquigarrow} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \to X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

4. RANGO DE UNA MATRIZ.

Es el orden del mayor determinante distinto de cero que puedo construir con los elementos de la matriz.

a. Matriz numérica.

64. Estudio del rango de una matriz numérica.

VER VÍDEO https://youtu.be/qP2PhLpvFBo

Seguimos el esquema siguiente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Paso 1. Si todos los elementos son cero → Rango = 0

Paso 2. Tomamos un determinante 2x2 distinto de cero.

Si no hay → Rango 1

Si hay alguno → Rango ≥ 2 → paso 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango de A} \geq 2$$

Paso 3. Tomamos los determinantes 3x3 que incluyan al 2x2.

Si todos son cero → Rango 2

Si hay alguno distinto de cero → Rango ≥ 3 → paso 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango A} = 2$$

Paso 4. Tomamos los determinantes 4x4 que incluyan al 3x3.

Si todos son cero → Rango 3

Si hay alguno distinto de cero → Rango ≥ 4 → paso 5…

65. Estudia el rango de la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

VER VIDEO https://youtu.be/Xr2HS0wyfVo

66. Estudia el rango de la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

VER VIDEO https://youtu.be/cCu63SX7jZU

67. Estudia el rango de la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VER VIDEO https://youtu.be/7S0ZIZqUZKg

b. Matriz con parámetros.

68. Rango de una matriz con parámetros.

VER VÍDEO https://youtu.be/yex-vKUMxOA

VER VÍDEO https://youtu.be/vbSYmxfNcgY

Seguimos el método siguiente.

Estudia el rango de la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{k} & \mathbf{k} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{k} \end{pmatrix}$

Paso 1. Tomamos el mayor determinante posible. Resolvemos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación resultante.

$$\begin{vmatrix} k & -1 & -2 \\ 1 & k & k \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3k - 2 - (-6k + k^2) = -k^2 + 3k - 2 = 0 \begin{cases} k = 2 \\ k = 1 \end{cases}$$

Paso 2. Para los valores distintos de los hallados en paso 1, la matriz tiene rango máximo.

Para k ≠ 1 y k ≠ 2 el determinante tomado es distinto de cero ⟶ Rango de A = 3

Paso 3. Los valores hallados en el paso 1 los sustituyo en la matriz y pasa a ser el estudio de una matriz numérica.

Para k = 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{Rango } A \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow RA = 3 \end{array} \right.$$

Para k = 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{Rango } A \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right. \rightarrow RA = 2$$

69. Estudia el rango de la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{k} \\ \mathbf{1} & \mathbf{k} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

VER VIDEO https://youtu.be/pQjn7UeyQh0

Paso 1. Tomamos el mayor determinante posible. Resolvemos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación resultante.

$$\begin{vmatrix} k & 1 & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6k + 4 + 3k - (4k + 6k + 3) = -k + 1 = 0 \rightarrow k = 1$$

Paso 2. Para los valores distintos de los hallados en paso 1, la matriz tiene rango máximo.

Para k ≠ 1 el determinante tomado es distinto de cero ⟶ Rango de A = 3

Paso 3. Los valores hallados en el paso 1 los sustituyo en la matriz y pasa a ser el estudio de una matriz numérica.

Para k = 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{Rango } A \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right. \rightarrow RA = 2$$

70. Estudia el rango de la siguiente matriz: A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{k} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

VER VIDEO https://youtu.be/nZW8YWTxK04

Paso 1. Tomamos el mayor determinante posible. Resolvemos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación resultante.

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & k \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k & 3 & 1 \\ 0 & 2-k & -4 & k-1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-k & -4 & k-1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8k + 24;$$

–8k + 24 = 0; k = 3.

Paso 2. Para los valores distintos de los hallados en paso 1, la matriz tiene rango máximo.

Para k ≠ 3 el determinante tomado es distinto de cero ⟶ Rango de A = 4

Paso 3. Los valores hallados en el paso 1 los sustituyo en la matriz y pasa a ser el estudio de una matriz numérica.

Para k = 3:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{Rango A} \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \\ |A| = 0 \end{cases}$$

Rango de A = 3

71. Estudia el rango de la siguiente matriz: A = $\begin{pmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{k} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{k} & \mathbf{k} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

VER VIDEO https://youtu.be/oINi6FAOUWE

Paso 1. Tomamos el mayor determinante posible. Resolvemos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación resultante.

$$\begin{vmatrix} k & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & k & k \end{vmatrix} = k^2 + 3k - (6 - 2k^2) = 3k^2 + 3k - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -2 \end{cases}$$

Paso 2. Para los valores distintos de los hallados en paso 1, la matriz tiene rango máximo.

Para k ≠ 1 y k ≠ –2 el determinante tomado es distinto de cero ⟶ Rango de A = 3

Paso 3. Los valores hallados en el paso 1 los sustituyo en la matriz y pasa a ser el estudio de una matriz numérica.

Para k = 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{Rango A} \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{RA} = 2$$

Para k = –2:

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&3&-2\\1&1&-2&2\\2&-2&-2&3\end{pmatrix}\left\{\begin{array}{l}\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\neq 0\rightarrow \text{Rango A}\geq 2\\ \begin{vmatrix}1&0&3\\1&1&-2\\2&-2&-2\end{vmatrix}=0;\begin{vmatrix}1&0&-2\\1&1&2\\2&-2&3\end{vmatrix}\neq 0\end{array}\right.\rightarrow \text{RA}=3$$

72. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{a}&\mathbf{2}&\mathbf{-1}\\\mathbf{2}&\mathbf{a}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$ **y B =** $(\mathbf{a}\quad \mathbf{3a}\quad \mathbf{6})$

a. Calcula el determinante de la matriz A.
b. En función del parámetro a, calcula el rango de la matriz A.
c. Para a = 1 calcula la matriz inversa de A.
d. Para a = 1 resuelve la ecuación A·X = B.

VER VÍDEO https://youtu.be/GwHxTMx-e-s

a. – $a^2 + 2$ª

b. Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$ el rango de A es 3. Si $a = 0$ o $a = 2$ el rango de A es 2.

c. $\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&1&0\\-3&1&1\end{pmatrix}$

d. X no existe.

73. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix}\mathbf{a}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{a-1}\\\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{0}&\mathbf{3}&\mathbf{a}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$**, calcula si existe el valor del parámetro a para que el rango de la matriz A sea 2.**

VER VÍDEO https://youtu.be/j5p3kenXszI

Si $a = 5$ el rango de A es 2. Si $a \neq 5$ el rango de A es 3.

74. Dada la matriz: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{a^2}&\mathbf{a}&\mathbf{a}\\\mathbf{a}&\mathbf{a^2}&\mathbf{1}\\\mathbf{a}&\mathbf{1}&\mathbf{a^2}\end{pmatrix}$

a. Estudia el rango de la matriz A según los valores de a.
b. Determina para qué valores de a la matriz A tiene inversa.
c. Para el valor de a = - 1 calcula la solución x de la ecuación matricial siguiente.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/f3WegtMmc2E
VER VÍDEO https://youtu.be/UbJS1ztug-k

75. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{3}&\boldsymbol{x}\\\mathbf{4}&\mathbf{6}&\mathbf{8}\\\mathbf{6}&\mathbf{9}&\mathbf{12}\end{pmatrix}$ **y B =** $\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$

a. Calcula A·B y (A·B)^t
b. ¿Es posible calcular B^2**? Si es posible calcúlala.**

c. Para los diferentes valores de x calcula el rango de A.