SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL ESPACIO.

ECUACIONES DEL PLANO. ECUACIONES DE LA RECTA. LOS PLANOS Y EJES DE COORDENADAS. PROYECCIONES Y PUNTO SIMÉTRICO. POSICIÓN RELATIVA, plano - plano, plano - recta, recta – recta y tres planos. DISTANCIAS, punto – punto, punto – recta, punto – plano, recta – recta, recta - plano y plano – plano. RECTA PERPENDICULAR COMÚN. ÁNGULOS, recta – recta, plano – plano y recta – plano. ÁREA DEL PARALELOGRAMO ABCD Y DEL TRIÁNGULO ABC. VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO Y DEL TETRAEDRO OABC. HAZ DDE PLANOS.

1. ECUACIONES DEL PLANO.

VÍDEOS FUNDAMENTALES PARA ESTE TEMA.

VER VÍDEO https://youtu.be/zFuCN2-jtys

VER VÍDEO https://youtu.be/noekzqMyGKs

VER VÍDEO https://youtu.be/81s-0cLZrck

VER VÍDEO https://youtu.be/R3CTUoe4jEk

- VECTORIAL: (x, y, z) = (1, 2, -3) + λ.(2, -3, 1) + μ.(-1, 4 ,0)

PUNTO DEL PLANO: (1, 2, -3)

VECTORES DIRECTORES DEL PLANO: $\begin{cases}(2,-3,1)\\(-1,4,0)\end{cases}$

VECTOR NORMAL AL PLANO: $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - \vec{j} + 11\vec{k} = (-4,-1,11)$

● PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = 3 \\ y = \mu - 2 \\ z = \alpha + \mu \end{cases}$

PUNTO DEL PLANO: (3, -2, 0)

VECTORES DIRECTORES DEL PLANO: $\begin{cases} (0\,,1\,,1) \\ (0\,,0\,,1) \end{cases}$

VECTOR NORMAL AL PLANO: $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} = (1\,,0\,,0)$

● GENERAL O IMPLICITA: $Ax + By + Cz + D = 0$; $3x - 2y + z + 1 = 0$

VECTOR NORMAL AL PLANO: $\vec{n} = (A, B, C) = (3\,, -2, 1)$

Despejamos una de las variables: $z = -3x + 2y - 1$; y escribimos las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -3\alpha + 2\beta - 1 \end{cases}$

PUNTO DEL PLANO: (0, 0, -1)

VECTORES DIRECTORES DEL PLANO: $\begin{cases} (1, 0, -3) \\ (0\,,1\,,2) \end{cases}$

1. a. Dado el plano (x , y, z) = (1 , 2 , 3) + s (-2 , 3 , 0) + t (2 , -3 , 1) escribirlo en paramétricas y general.

b. Dado el plano x – 2y + z = 0 escribirlo en vectorial y paramétricas.

VER VÍDEO https://youtu.be/I8fGgVN5nuU

PUNTO DEL PLANO: (1 , 2 , 3)

VECTORES DIRECTORES DEL PLANO: $\begin{cases} (-2,3,0) \\ (2,-3,1) \end{cases}$

PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = 1 - 2s + 2t \\ y = 2 + 3s - 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$

GENERAL: $\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ y-2 & 3 & -3 \\ z-3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; 3x + 2y - 7 = 0$

Despejando la x : $x = 2y - z$; PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = 2\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$

PUNTO DEL PLANO: (0 , 0 , 0)

VECTORES DIRECTORES DEL PLANO: $\begin{cases} (2\,,1\,,0) \\ (-1\,,0\,,1) \end{cases}$

VECTORIAL: $(x\,,y\,,z) = (0\,,0\,,0) + \mu(2\,,1\,,0) + \lambda(-1\,,0\,,1)$

2. a. Escribe la ecuación del plano que pasa por (1 , 2 ,3) y es paralelo a los vectores (1 , -1 , 0) y (2 , - 2 , 1).

b. Escribe la ecuación del plano que pasa por P = (0 , -2 ,3) y Q = (1 , -1 , 0) y es paralelo al vector $\vec{v}$ = (-2 , - 1 , 1).

c. Escribe la ecuación del plano que pasa por P = (2 , -1 ,3) y es perpendicular al vector (3, - 1, 2)

VER VÍDEO https://youtu.be/SJj35w2r0f8

Simplemente: (x , y , z) = (1 , 2 ,3) + μ (1 , -1 , 0) + λ (2 , - 2 , 1). Como en el ejemplo 1 escribimos las paramétricas y la general.

Hallamos $\overrightarrow{PQ}$ = (1,1,-3)
Tomando el punto P y los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\vec{v}$. Hacemos como ejemplo anterior.

Plano perpendicular a (3, - 1, 2) será 3x – y + 2z + D = 0. Sustituimos x, y y z por 3, - 1 y 2. 3·3 – (– 1) + 2·2 + D = 0; D = – 13.
El plano pedido es 3x – y + 2z – 13 = 0

3. a. Escribe la ecuación del plano que pasa por P = (0 , -2 ,3) , Q = (1 , -1 , 0) , R = (1 ,1 ,0) y S = (0 , 0 ,3) si es que son coplanarios.

b. Determinar los valores de m para que los puntos A(1,2,0), B(0,3,−1), C(1,0,1) i D(−1,2,m) sean coplanarios y calcular la ecuación general del plano que los contiene.

VER VÍDEO https://youtu.be/ECvqZ_9b0Dc

Estudiamos el determinante: $\begin{vmatrix} \overrightarrow{PQ} \\ \overrightarrow{PR} \\ \overrightarrow{PS} \end{vmatrix} \begin{cases} = 0, \text{SÍ SON COPLANARIOS} \\ \neq 0, \text{NO SON COPLANARIOS} \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 3 - 3 - (9 + 3 - 3) = 0 \rightarrow \text{son coplanarios.}$$

Para hallar la ecuación del plano que los contiene basta tomar tres de los cuatro puntos. Hacemos como ejemplo 5.

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AD} \end{vmatrix} \begin{cases} = 0 \text{ coplanarios.} \\ \neq 0 \text{ no coplanarios.} \end{cases}; \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{vmatrix} = 2m - 2 + 4 = 0 \rightarrow m = -1$$

Si m ≠ - 1 |A| ≠ 0 ⟶ no son coplanarios. Si m = - 1, |A| = 0 ⟶ son coplanarios.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x - 2 - 2y + 4 - 4z = 0 \rightarrow x - y - 2z + 1 = 0$$

2. ECUACIONES DE LA RECTA.

VIDEOS FUNDAMENTALES PARA ESTE TEMA.

VER VÍDEO https://youtu.be/5qwzgghlDUQ

VER VÍDEO https://youtu.be/GInbel9fY24

VER VÍDEO https://youtu.be/NCAmRNlP3Pc

- VECTORIAL: (x, y, z) = (1, -2, -7) + λ.(2, 3, 1)

  PUNTO DE LA RECTA: (1, 2, -3)
  VECTOR DIRECTOR DE LA RECTA: (2 , 3 , 1)
  Para hallar otros puntos doy valores a λ.

- PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = \alpha + 4 \end{cases}$

  PUNTO DE LA RECTA: (3, -2, 4)
  VECTOR DIRECTOR DE LA RECTA: (0 , 0 ,1)
  Para hallar otros puntos doy valores a λ.

- CONTINUA: $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{-1}$

  PUNTO DE LA RECTA: (1 , -2 , 0)
  VECTOR DIRECTOR DE LA RECTA: (3 , 0 ,-1)
  Para hallar otros puntos doy valores a x y hallo la y y la z.

Si la ecuación fuera: $\frac{1-x}{3} = \frac{2y+1}{2} = \frac{z}{4}$ debemos arreglarla antes de sacar la información (punto y vector) $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+\frac{1}{2}}{1} = \frac{z}{4}$. En la primera fracción multiplicamos numerador y denominador por -1, en la segunda por ½ para que los coeficientes de la x la y y la z sean unos.

PUNTO DE LA RECTA: (1 , -1/2 , 0)
VECTOR DIRECTOR DE LA RECTA: (-3 , 1 ,4)
Para hallar otros puntos doy valores a x y hallo la y y la z.

- GENERAL O IMPLICITA: $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y - 3z = 2 \end{cases}$

Resolviendo el sistema teniendo en cuenta que es compatible indeterminado:

Hacemos z = λ $\begin{cases} x + 2y = 1 - \lambda \\ 2x - y = 2 + 3\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 - \lambda \\ 4x - 2y = 4 + 6\lambda \end{cases}$

$5x = 5 + 5\lambda \rightarrow x = 1 + \lambda$

$y = 2x - 2 - 3\lambda = 2 + 2\lambda - 2 - 3\lambda = -\lambda$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta son $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

PUNTO DE LA RECTA: (1 , 0 , 0)
VECTOR DIRECTOR DE LA RECTA: (1 , −1 ,1)
Para hallar otros puntos doy valores a λ.

Si solo busco el vector director puedo hacer v = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-5,5,-5)$

Que simplificado sería (- 1,1, -1)

4. a. Dada la recta (x, y, z) = (1, 2, 0) + t·(2, 0, 3), escribirla en todas sus formas.

b. Dada la recta $\frac{x}{0}=\frac{1-y}{2}=\frac{z+2}{3}$, escríbela en todas sus formas.

c. Dada la recta $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y-3z=-2 \end{cases}$, escribirla en todas sus formas.

VER VÍDEO https://youtu.be/Wcoo5HsY3DA

5. a. Determinar un plano que pasando por el origen de coordenadas sea paralela a la recta de ecuaciones $\left.\begin{matrix} x+y=1 \\ y+z=2 \end{matrix}\right\}$ y también paralelo a la recta que pasa pon los puntos A = (1, 1, 0) y B = (0, 1, 1).

b. Determina la ecuación general del plano que contiene a la recta $\frac{x}{0}=\frac{1-y}{2}=\frac{z+2}{3}$ y pasa por el punto (1, 2, 0).

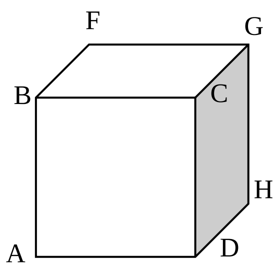
VER VÍDEO https://youtu.be/e_qu-QVUbeo

$$r: \left.\begin{matrix} x+y=1 \\ y+z=2 \end{matrix}\right\} \vec{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}-\vec{j}+\vec{k} = (1,-1,1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1,0,1)$$

$$\text{Plano } \pi \begin{cases} \text{Pasa por } (0,0,0) \\ \text{Paralelo a } r \rightarrow \vec{v_r} = \vec{v_\pi} = (1,-1,1); \\ \text{Paralelo a } \overrightarrow{AB} = (-1,0,1) = \vec{u_\pi} \end{cases} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x+2y+z=0$$

6. Considera el cubo que aparecen la figura adjunta. Suponemos que el punto C tiene coordenadas (1, 1, 1), las aristas del cubo son paralelas a los ejes de coordenadas, siendo la arista AE paralela al eje x la arista AD paralela al eje Y y la arista AB paralela al eje Z. Los lados del cubo tienen longitud dos. Calcula el plano que pasa por los puntos AECG y la recta perpendicular al plano anterior que pasa por el punto D.



VER VÍDEO https://youtu.be/TTce7ZOrzDI

A(1, – 1, – 1); C(1, 1, 1) y E(–1, – 1, – 1)

$$\pi: \begin{cases} \text{Pasa por } A(1,-1,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (0,2,2) \\ \overrightarrow{AE} = (-2,0,0) \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & y+1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y-z=0$$

$$r: \begin{cases} D(1,1,-1) \\ n_\pi = v_r = (0,1,-1) \end{cases} \rightarrow \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

7. Dados los puntos A (0, 0, 0) y B (1, 1, 2), determinar los puntos C y D tales que el cuadrilátero ABCD sea un rectángulo en el plano x + y – z = 0 y la coordenada x del punto C valga 1.
VER VÍDEO https://youtu.be/5ytEIa2Qgqw

$$\text{Punto C }(1,y,z)\begin{cases}\text{Pertenece al plano} \rightarrow 1+y-z=0\\ \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AB}\rightarrow(1,y,z)\cdot(1,1,2)=0\rightarrow 1+y+2z=0\end{cases}\rightarrow C(1,-1,0)$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\rightarrow(1,1,2)=(x-1,y+1,z)\rightarrow\begin{cases}x-1=1\\ y+1=1\\ z=2\end{cases}\rightarrow D(2,0,2)$$

8. Se consideran los puntos A (3, 0, 0), B (0, 2, 0) y C (0, 0, 1).
a) Hallar la ecuación general del plano π que los contiene.
b) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular a π y que pasa por el origen de coordenadas. Hallar también el punto de intersección de la recta con el plano.
VER VÍDEO https://youtu.be/cjRrYtLEDBI

El plano buscado es $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y+z=1$, es decir, 2x + 3y + 6z = 6.

$$r:\begin{cases}\text{perpendicular a } \pi:\ \overrightarrow{n_\pi}=\overrightarrow{v_r}=(2,3,6)\\ \text{contiene al }(0,0,0)\end{cases}\begin{cases}x=2t\\ y=3t\\ z=6t\end{cases}$$

Sustituyendo las paramétricas de r en el plano π obtenemos t y, en consecuencia, el punto de corte. 4t + 9t + 36t = 6, $t=\frac{6}{49}$.

El punto de corte es $P\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)$

9. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 0, 2) y es paralela a los planos: x – 2y + 3z +1 = 0 y 2x – 3y + z +6 = 0
VER VÍDEO https://youtu.be/dSj5arMbIo0

$$\text{Pasa por }(1,0,2)\rightarrow\frac{x-1}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z-2}{c}$$

Es paralela a $\pi: x-2y+3z+1=0\rightarrow\overrightarrow{n_\pi}\perp\overrightarrow{v_r}\rightarrow(1,-2,3)\cdot(a,b,c)=0\rightarrow$
$\rightarrow a-2b+3c=0$

Es paralela a $\pi': 2x-3y+z+6=0\rightarrow\overrightarrow{n_{\pi'}}\perp\overrightarrow{v_r}\rightarrow(2,-3,1)\cdot(a,b,c)=0\rightarrow$
$\rightarrow 2a-3b+c=0$

$$\begin{cases}a-2b+3c=0\\ 2a-3b+c=0\end{cases}\rightarrow\overrightarrow{v_r}=(7,5,1)\rightarrow\frac{x-1}{7}=\frac{y}{5}=\frac{z-2}{1}$$

10. Halla la ecuación continua de la recta paralela al plano π: 2x – 2y + 5z = 3 y perpendicular a la recta r: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3}$ en el punto (- 1, 2, 0)
VER VIDEO https://youtu.be/SbrYKfMuKyI

$$\text{Buscamos la recta s:}\begin{cases}\text{Pasa por }(-1,0,2)\\ \text{paralela a }\pi\rightarrow\overrightarrow{v_s}\perp\overrightarrow{n_\pi}\rightarrow(a,b,c)\cdot(2,-2,5)=0\rightarrow 2a-2b+5c=0\\ \text{perpendicular a r: }\overrightarrow{v_s}\perp\overrightarrow{v_r}\rightarrow(a,b,c)\cdot(2,-1,3)=0\rightarrow 2a-b+3c=0\end{cases}$$

Haciendo $c = 1 \rightarrow \begin{cases} 2a - 2b = -5 \\ 2a - b = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{v_s} = \left(\frac{-1}{2}, 2{,}1\right); o\ (-1{,}4{,}2)$

La recta s: $\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{2}$

11. Sabemos que la recta r: (x,y,z) = (1, - b,0) + t(2, - 10,1) y el plano π: 2x + ay + z = 2 se cortan perpendicularmente y que la recta pasa por el punto (- 1,1, - 1). Calcula a, b y el punto de corte.
VER VÍDEO https://youtu.be/6v2kkHP7HvI

Sustituyendo el punto en la recta r: (- 1,1, - 1) = (1, - b,0) + t(2, - 10,1)$\begin{cases} -1 = 1 + 2t \\ 1 = -b - 10t \end{cases}$
resulta b = 9. Si se cortan perpendicularmente, el vector director de la recta (2, - 10, 1) es paralelo al vector normal o asociado del plano (2, a, 1). $\frac{2}{2} = \frac{-10}{a} = \frac{1}{1} \rightarrow a = -10$.
La recta r queda (x,y,z) = (1, - 9,0) + t(2, - 10,1) y el plano π: 2x – 10y + z = 2
Escribimos r en paramétricas $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -9 - 10t \\ z = t \end{cases}$, sustituyendo en la ecuación del plano hallaremos t. 2.(1 + 2t) – 10.(- 9 – 10t) + t = 2; $t = \frac{-90}{105}$. Punto de corte $\left(\frac{-5}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-90}{105}\right)$

12. a. Calcula la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano π, que pasa por los puntos A = (1, 1, 1), B = (0, 2, 1) y C = (0, 0, - 1).
b. Escribe la ecuación de la recta, en todas sus formas, que pasa por P = (1 , 1 , 1) y Q = (2 , 2 , 0)
VER VÍDEO https://youtu.be/9UyOLenoKaM

Plano π: $\begin{cases} A = (1{,}1{,}1) \\ \overrightarrow{AB} = (-1{,}1{,}0) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,-1,-2) \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x + y - z - 1 = 0$

Recta r: $\begin{cases} O = (0{,}0{,}0) \\ n_\pi = v_r = (1{,}1,-1) \end{cases} \rightarrow x = y = \frac{z}{-1}$

Hallamos el vector $\overrightarrow{PQ}$= Haciendo Q – P = (1 , 1 , -1)
Hallamos recta que pasa por P y tiene como vector director $\overrightarrow{PQ}$.
Vectorial: (x , y , z) = (1 , 1 , 1) + t. (1 , 1 , -1)
Paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$

Continua: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$

General o implícita. Operando en la continua:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} \to x-1 = y-1 \to x-y=0 \\ \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-1} \to y-1 = z-1 \to y-z=0 \end{cases} \to \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

13. a. Escribe la ecuación del plano que pasa por el punto P = (2, 2, 3) y contiene a la recta r (x, y, z) = (1, 2, 3) + t (0, 1, -2).

b. Escribe la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s:

r (x, y, z) = (1, 2, 3) + t (0, 1, – 2)

$$\mathbf{s:}\ \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/0sz7RjYRu98

$$\text{Buscamos el plano } \pi \begin{cases} \text{pasa por } P = (2,2,3) \\ \text{contiene a r} \begin{cases} \text{pasa por } Q = (1,2,3) \\ \text{tiene por vector } \vec{v} = (0,1,-2) \end{cases} \end{cases}$$

Punto P = (2, 2, 3)

$$\text{Vectores:} \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-1,\ 0,0) \\ \vec{v} = (0,1,-2) \end{cases}$$

π: (x, y, z) = (2, 2, 3) + t (0, 1, −2) +s(−1, 0, 0)

$$\text{Buscamos el plano } \pi \begin{cases} \text{contiene a r} \begin{cases} \text{pasa por } Q = (1,2,3) \\ \text{tiene por vector } \vec{v} = (0,1,-2) \end{cases} \\ \text{contiene a s} \begin{cases} \text{pasa por } P = (0,1,0) \\ \text{tiene por vector } \vec{u} = (3,2,0) \end{cases} \end{cases}$$

Operando π: 4x – 6y – 3z + 17 = 0

14. Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto (- 1, 2, 0) y contiene a la recta r intersección de los planos x + y – z + 1 = 0 y 2x + y + 3z – 2 = 0.

VER VÍDEO https://youtu.be/tsXvMZLrfik

$$r: \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x+y+3z-2=0 \end{cases};\ \begin{cases} x+y = z\text{-}1 \\ 2x+y = 2\text{-}3z \end{cases};\ x = 3\text{-}4z;\ y = \text{-}4+5z\ \begin{cases} x = 3\text{-}4t \\ y = \text{-}4+5t. \\ z = t \end{cases}$$

Un punto de r es P (3, - 4, 0) y un vector director es $\vec{v} = (-4,5,1)$

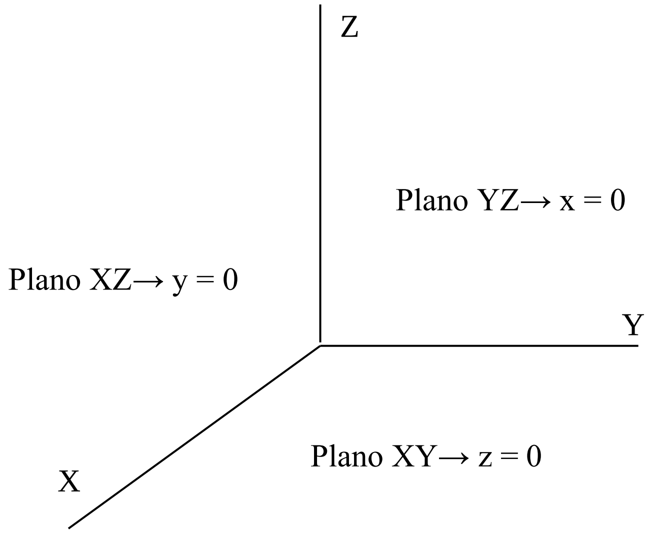
$$\text{El plano buscado } \pi \begin{cases} \text{Pasa por Q (-1,2,0)} \\ \text{Pasa por P (3,-4,0)} \\ \text{Tiene como vector director } \vec{v} = (-4,5,1) \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} \text{Pasa por (-1,2,0)} \\ \text{sus vectores son} \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-4,6,0) \\ \vec{v} = (-4,5,1) \end{cases} \end{cases}$$

π: 3x + 2y + 2z – 1 = 0

3. LOS EJES Y PLANOS DE COORDENADAS.

VER VÍDEO https://youtu.be/Z-iMuKgshK8



PLANOS DE COORDENADAS.

$$XY \rightarrow \begin{cases} \text{VECTORIAL. } (x, y. z) = (0,0,0) + t \cdot (1,0,0) + s \cdot (0,1,0) \\ \text{PARAMÉTRICAS. } \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 0 \end{cases} \\ \text{GENERAL. } z = 0 \end{cases}$$

$$XZ \rightarrow \begin{cases} \text{VECTORIAL. } (x, y. z) = (0,0,0) + t \cdot (1,0,0) + s \cdot (0,0,1) \\ \text{PARAMÉTRICAS. } \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = s \end{cases} \\ \text{GENERAL. } y = 0 \end{cases}$$

$$YZ \rightarrow \begin{cases} \text{VECTORIAL. } (x, y. z) = (0,0,0) + t \cdot (0,1,0) + s \cdot (0,0,1) \\ \text{PARAMÉTRICAS. } \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = s \end{cases} \\ \text{GENERAL. } x = 0 \end{cases}$$

EJES DE COORDENADAS.

$$\text{EJE X} \rightarrow \begin{cases} \text{VECTORIAL. } (x, y, z) = (0,0,0) + t \cdot (1,0,0) \\ \text{PARAMÉTRICAS. } \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ \text{CONTINUA. } \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0} \\ \text{GENERAL. } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{EJE Y} \rightarrow \begin{cases} \text{VECTORIAL. } (x,y,z) = (0,0,0) + t\cdot(0,1,0) \\ \text{PARAMÉTRICAS.} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \\ \text{CONTINUA.} \dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{0} \\ \text{GENERAL.} \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{EJE Z} \rightarrow \begin{cases} \text{VECTORIAL. } (x,y,z) = (0,0,0) + t\cdot(0,0,1) \\ \text{PARAMÉTRICAS.} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \\ \text{CONTINUA.} \dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{t} \\ \text{GENERAL.} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

15. a. Dada la recta r, calcular los puntos de corte de r con los planos cartesianos (de coordenadas).

$$\mathbf{r:\ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}}$$

b. Hallar los puntos de corte de la recta $\begin{cases} \mathbf{x = t} \\ \mathbf{y = 2 + t} \\ \mathbf{z = t + 1} \end{cases}$ **y los planos de coordenadas.**

VER VÍDEO https://youtu.be/vCBKunBK8c0

Plano XY: (1, 0, 0), plano XZ: (1, 0, 0) y plano YZ: (0, −3/2, 1/2)

$$\text{Plano XY} \rightarrow z = 0 \rightarrow \left\{ \begin{matrix} x = t \\ y = 2 + t \\ z = t + 1\text{, si } z = 0 \rightarrow t = -1 \end{matrix} \right\} \rightarrow (-1,1,0)$$

$$\text{Plano XZ} \rightarrow y = 0 \rightarrow \left\{ \begin{matrix} x = t \\ y = 2 + t\text{, si } y = 0 \rightarrow t = -2 \\ z = t + 1 \end{matrix} \right\} \rightarrow (-2,0,-1)$$

$$\text{Plano YZ} \rightarrow x = 0 \rightarrow \left\{ \begin{matrix} x = t\text{, si } x = 0 \rightarrow t = 0 \\ y = 2 + t \\ z = t + 1 \end{matrix} \right\} \rightarrow (0,2,1)$$

16. Hallar los puntos de corte del plano x + 2y + 3z = 6 y los ejes de coordenadas.

VER VÍDEO https://youtu.be/Zg28VeDT6zU

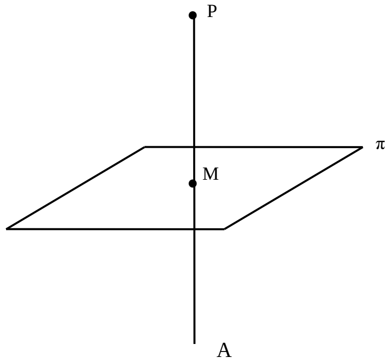
$$\text{EJE X} \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow (6,0,0);\ \text{EJE Y} \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow (0,3,0);\ \text{EJE Z} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow (0,0,2)$$

4. PROYECCIONES Y PUNTO SIMÉTRICO

a. PUNTO – PLANO

17. Calcule la ecuación general del plano que pasa por los puntos A, B y C, siendo:
A: El simétrico del punto P (1, 2, 3) respecto al plano x = z.
B: La proyección ortogonal del punto Q (2, 1, 3) respecto al plano Z = 0.
C: Origen de coordenadas.
VER VÍDEO https://youtu.be/3U4vd2m7ptI

Hallamos M, la proyección de P sobre π, que es el punto del plano más próximo a P.



Hallamos la recta r: $\begin{cases} \text{Pasa por P } (1,2,3) \\ \text{Perpendicular a } \pi;\ \overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{v_r} = (1,0,-1) \end{cases}$; r: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - t \end{cases}$

El punto M es la intersección de r y π. → $1 + t - 3 + t = 0 \rightarrow t = 1$
$M = (2,2,2)$

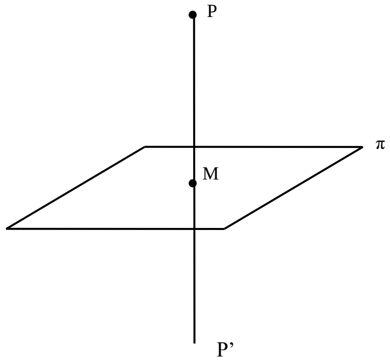
$$M = \frac{P + A'}{2} \rightarrow (2,2,2) = \frac{(1,2,3) + (x,y,z)}{2} \rightarrow A = (3,2,1)$$

La proyección ortogonal (perpendicular) de (2,1,3) sobre z = 0 es B = (2,1,0)

Plano A, B, C $\begin{cases} C = (0,0,0) \\ \overrightarrow{CA} = (3,2,1) \\ \overrightarrow{CB} = (2,1,0) \end{cases}$ $(x,y,z) = (0,0,0) + \alpha(3,2,1) + \beta(2,1,0);\ x - 2y + z = 0$

18. Dados el punto A (1, 1, 1) el plano π: x + y + 3z = 6
a. Calcula el punto del plano más próximo a P.
b. Calcula el punto simétrico de P respecto al plano.
VER VÍDEO https://youtu.be/C9OrEWdokmQ

Hallamos M, la proyección de P sobre π, que es el punto del plano más próximo a P.



Hallamos la recta r: $\begin{cases} \text{Pasa por P} \\ \text{Perpendicular a } \pi;\ \overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{v_r} = (1,1,3) \end{cases}$; r: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

El punto M es la intersección de r y π. → $1 + t + 1 + t + 3(1 + 3t) = 6 \rightarrow t = \frac{1}{11}$

$$M = \left(\frac{12}{11}, \frac{12}{11}, \frac{14}{11}\right)$$

$$M = \frac{P + P'}{2} \rightarrow \left(\frac{12}{11}, \frac{12}{11}, \frac{14}{11}\right) = \frac{(1,1,1) + (x, y, z)}{2} \rightarrow P' = \left(\frac{13}{11}, \frac{13}{11}, \frac{17}{11}\right)$$

b. PUNTO – RECTA

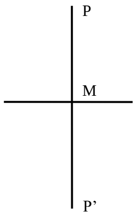
20. Dado el punto A (- 3, 1, - 7) y la recta r.

$$x + 1 = \frac{y - 3}{2} = \frac{z + 1}{2}$$

a. Hallar el punto de r más próximo a A.

b. Hallar el simétrico de A respecto de r.

VER VÍDEO https://youtu.be/TlNLfzOHkxA



1. Hallamos el plano que contiene a P y es perpendicular a r.

$$\pi: \begin{cases} \text{Pasa por } (-3,1,-7) \\ \perp \text{ a r} \rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n_\pi} = (1,2,2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z + D = 0 \\ -3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-7) + D = 0 \rightarrow D = 15 \end{cases}$$

$\pi: x + 2y + 2z + 15 = 0$

2. Hallamos el punto M.

$$\begin{cases} r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \\ \pi: x + 2y + 2z + 15 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 + t + 2(3 + 2t) + 2(-1 + 2t) + 15 = 0 \\ -1 + t + 6 + 4t - 2 + 4t + 15 = 0 \\ t = \frac{-18}{9} = -2 \rightarrow M = (-3, -1, -5) \end{cases}$$

3. Hallamos P'

$$\frac{P+P'}{2}=M\rightarrow\frac{(-3,1,-7)+(x,y,z)}{2}=(-3,-1,-5)\rightarrow\begin{cases}\dfrac{-3+x}{2}=-3\rightarrow x=-3\\ \dfrac{1+y}{2}=-1\rightarrow y=-3\\ \dfrac{-7+z}{2}=-5\rightarrow z=-3\end{cases}$$

$P'=(-3,-3,-3)$

c. RECTA – PLANO

22. Proyectar la recta r:(x, y, z) = (1, 7, 0) + t·(2, - 3, 0) sobre el plano α: 2y – 3z = 1
VER VÍDEO https://youtu.be/VUbIxd0KiHM

Basta hallar el plano β que contiene a r y es perpendicular a α

$$\beta\begin{cases}\text{contiene a r}\begin{cases}R=\text{punto de }\beta=(1,7,0)\\ \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_\beta}=(2,-3,0)\end{cases}\\ \text{perpendicular a }\alpha\rightarrow\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{u_\beta}=(0,2,-3)\end{cases}\rightarrow\begin{vmatrix}x-1 & y-7 & z\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 2 & -3\end{vmatrix}=0\rightarrow$$

β: 9x + 6y + 4z – 51 = 0

La proyección es la recta $\begin{cases}2y-3z=1\\ 9x+6y+4z-51=0\end{cases}$

4. POSICIONES RELATIVAS.

a. PLANO – PLANO.

Ax + By + Cz + D = 0
A'x + B'y + C'z + D' = 0

Estudiamos las matrices $A=\begin{pmatrix}A & B & C\\ A' & B' & C'\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ A' & B' & C' & D'\end{pmatrix}$.
Si rango de A = 2 = rango A* →Los plano se cortan en una recta.
Si rango de A = 1 y rango de A* = 2 → Los planos son paralelos.
Si rango de A = 1 = rango A* →Los plano coinciden.

23. Estudia la posición relativa de los siguientes planos según los valores de k. Hallar la ecuación continua de la recta de intersección de los planos en el caso k = - 1
α: (k – 2)x + y + (2k + 1)z = 1 y β: 2x + (k – 1)y – z = 0
VER VÍDEO https://youtu.be/gPuzAbWI040

Sean las matrices A y A^*. $A=\begin{pmatrix}k-2 & 1 & 2k+1\\ 2 & k-1 & -1\end{pmatrix}$ y $A^*=$
$\begin{pmatrix}k-2 & 1 & 2k+1 & 1\\ 2 & k-1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} k-2 & 1 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} = k^2 - 3k = 0$. k = 0 y k = 3.

Si k ≠ 0 y k ≠3, rango de A = rango A^* = 2. Los planos se cortan en una recta.

Si k = 0 $\begin{cases} A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \text{El rango de A es 1.} \\ A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ El rango de } A^* \text{es 2} \end{cases}$. Los planos son paralelos.

Si k = 3 $\left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right.$.El rango de A es 2. Coincide con el de la ampliada. Se cortan en una recta.

Si $k = -1$ r: $\begin{cases} -3x + y - z = 1 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}t \\ z = -\frac{2}{3} - \frac{4}{3}t \end{cases}$ y la continua $\frac{x}{3} = \frac{y - \frac{1}{3}}{5} = \frac{z + \frac{2}{3}}{-4}$

b. RECTA – PLANO.

Si la recta está en paramétricas y el plano en implícita.

24. a. Estudia la posición relativa de la recta r:(x, y, z) = (1, 2, -3) + t(0, 2, 5) y el plano π: 2x + 4y + z - 7 = 0.

b.- Estudia la posición relativa de la recta r:(x, y, z) = (1, 2, -3) + t(0, 2, 5) y el plano π: 2x - 5y + 2z - 7 = 0

c.- Estudia la posición relativa de la recta r:(x, y, z) = (1, 2, -3) + t(0, 2, 5) y el plano π: 2x - 5y + 2z +14 = 0

VER VÍDEO https://youtu.be/5qg3WrXhhS8

a.

r: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$. Sustituimos en el plano. 2.1 + 4.(2 + 2t) + (-3 + 5t) – 7 = 0

De donde t = 0 → el plano y la recta se cortan en un punto. Sustituyendo la t = 0 en la recta hallaremos el punto. P = (1, 2, - 3)

b.

r: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$. Sustituimos en el plano. 2.1 - 5.(2 + 2t) + 2 (-3 + 5t) – 7 = 0.

2 – 10 – 10t – 6 + 10t – 7 = 0 →” La t desaparece” - 21 = 0 → ecuación incompatible → la recta y el plano son paralelos.

c.

r: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$. Sustituyo en el plano. 2.1 - 5.(2 + 2t) + 2 (-3 + 5t) +14 = 0.

2 – 10 – 10t – 6 + 10t +14 = 0 →” La t desaparece” 0 = 0 → ecuación compatible indeterminada → la recta está contenida en el plano.

25. Determinar la posición relativa del plano x + y + z = 1 y la recta r. Calcula la proyección ortogonal de la recta sobre el plano.

$$\mathbf{r: x-1=y-1=\frac{z-1}{-2}}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/_lEFSKG-hNA

$$r: x-1=y-1=\frac{z-1}{-2} \rightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1-2t \end{cases}$$

$1+t+1+t+1-2t=1 \rightarrow 3=1$ Ecuación incompatible, paralelos.

Para la proyección ortogonal de la recta sobre el plano, buscamos el plano que contiene a la recta y es perpendicular al plano.

$$\pi' \begin{cases} \text{Contiene a r} \begin{cases} P_r = P_\pi = (1,1,1) \\ \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (1,1,-2) \end{cases} \\ \text{Es perpendicular a } \pi; \overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{v_{\pi'}}; \overrightarrow{v_{\pi'}} = (1,1,1) \end{cases} \qquad \pi' = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\pi' \equiv x-y=0$

La proyección es $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y=0 \end{cases}$

26. Se considera al plano que contiene al punto P (3, 1, 2) y la recta r de ecuación:

$$\mathbf{r: \frac{x-2}{-3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{4}}$$

Estudia la posición relativa de este plano y la recta s: (x, y, z) = (0, 1, 0) + t(1, 2, - 3). Halla, si existe, el punto de intersección.

VER VÍDEO https://youtu.be/GjUEJR3ZD-c

El plano π: $\begin{cases} \text{contiene a P (3, 1, 2)} \\ \text{contiene a r.} \begin{cases} \text{contiene a Q (2, 0, - 1)} \\ \text{tiene como vector } \vec{v} = (-3,2,4) \end{cases} \end{cases}$. π:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ -3 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

π: 2x + 13y – 5z – 9 = 0

Para estudiar la posición relativa del plano π y de la recta s $\begin{cases} x=t \\ y=1+2t \\ z=-3t \end{cases}$ sustituimos las ecuaciones paramétricas de la recta en el plano 2t + 13.(1 + 2t) – 5.(- 3t) – 9 = 0.

t = $\frac{-4}{43}$. El plano y la recta se cortan. Sustituyendo t en las paramétricas de la recta obtendremos el punto. $P_{corte} = \left(\frac{-4}{43}, \frac{35}{43}, \frac{12}{43}\right)$

Si la posición depende de un parámetro, mejor escribir la recta y el plano en implícita.

Si rango A = 3 = rango A* → se cortan en un punto.
Si rango A = 2 y rango A*= 3 → son paralelos.
Si rango A = 2 = rango A* → la recta está contenida en el plano.

27. Estudiar la posición relativa de la recta r: $\begin{cases} \mathbf{x+ky+3z=6} \\ \mathbf{2x-y-z=0} \end{cases}$ **y el plano π: x – 2y – z = -2**

VER VÍDEO https://youtu.be/zwl8qBA8LyY

$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ |A| = - 10 + k = 0 →k = 10.

Si k distinto de 10 → rango A = 3 = rango A* → se cortan en un punto. Punto que podemos hallar por Cramer.

Si k = 10 $\begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \text{Rango de A es 2.} \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 10 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \to \text{rango } A^* \text{es } 3 \end{cases}$ → son paralelos.

c. TRES PLANOS

Tomamos las ecuaciones implícitas de los tres planos y estudiamos el sistema.

Si rango de A = 3 = rango A*→ se cortan en un punto.

Si rango de A = 2 y rango A*= 3

Si A no tiene filas proporcionales. Forman un prisma

Si A tiene dos filas proporcionales. Dos son paralelos y el tercero los corta a ambos.

Si rango de A = 2 = rango A*

Si A no tiene filas proporcionales. Se cortan los tres planos en una recta.

Si A tiene filas proporcionales. Dos coinciden y el tercero los corta.

Si rango de A = 1 y rango de A*= 2

Si A* no tiene filas proporcionales. Los tres planos son paralelos.

Si A* tiene filas proporcionales. Dos coinciden y el tercero es paralelo a los otros dos.

Si rango A = rango A*. Los tres planos coinciden.

28. Halla los valores del parámetro k para que los tres planos tengan una recta en común. Halla también el vector de dirección de esa recta.

$$\begin{cases} \mathbf{x+y+kz=1} \\ \mathbf{kx+y+z=1} \\ \mathbf{2x+y+z=k} \end{cases}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/h7Yc3RNNee8

29. Estudia la posición relativa de los planos siguientes según los valores de m.

$$\begin{cases} \mathbf{x+y=1} \\ \mathbf{my+z=0} \\ \mathbf{x+(1+m)y+mz=m+1} \end{cases}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/HOQsCtfZ4Is

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&m&1\\1&1+m&m\end{pmatrix}\rightarrow |A|=m^2-m=0\rightarrow\begin{cases}m=0\\m=1\end{cases}$$

■Si m ≠ 0 y m ≠ 1, |A| ≠ 0 ⟶ rango de A = rango A* = 3 ⟶ Los planos se cortan en un punto.

■Si m = 0.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\neq 0 \text{ y } |A|=0\rightarrow \text{rango de } A=2$$

$$A^*=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow F_1=F_2\rightarrow \text{rango de } A^*=2$$

La matriz A tiene dos filas proporcionales ⟶ Dos coinciden y el tercero los corta.

■Si m = 1.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\neq 0 \text{ y } |A|=0\rightarrow \text{rango de } A=2$$

$$A^*=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&2&1&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\2&1&2\end{vmatrix}\neq 0\rightarrow \text{rango de } A^*=3$$

La matriz A no tiene filas proporcionales. ⟶ Forman un prisma

d. DOS RECTAS.

● Si las dos rectas están escritas en implícita.
Si rango de A*= 4 ⟶ Se cruzan.
Si rango de A = 3 y rango de A*= 3 ⟶ Se cortan en un punto.
Si rango de A = 2 y rango de A* = 3 ⟶ Son paralelas.
Si rango de A = 2 = rango A* ⟶ Son coincidentes.

30. Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

$$r:\begin{cases}\mathbf{x+y+z=3}\\\mathbf{2x-3y-z=-2}\end{cases}\qquad s:\begin{cases}\mathbf{3x-2y-3z=-2}\\\mathbf{x-2y+3z=2}\end{cases}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/e3VLyKMy_ik

Tomando juntas las cuatro ecuaciones tenemos:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-3&-1\\3&-2&-3\\1&-2&3\end{pmatrix};\ \begin{vmatrix}1&1\\2&-3\end{vmatrix}\neq 0\rightarrow \text{rango de } A\geq 2;\ \begin{vmatrix}1&1&1\\2&-3&-1\\3&-2&-3\end{vmatrix}\neq 0\rightarrow$$

⟶ rango de A = 3.

$$A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\2&-3&-1&-2\\3&-2&-3&-2\\1&-2&3&2\end{pmatrix};\ |A|=\begin{vmatrix}1&1&1&3\\2&-3&-1&-2\\3&-2&-3&-2\\1&-2&3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&-5&-3&-8\\3&-5&-6&-11\\1&-3&2&-1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}-5&-3&-8\\-5&-6&-11\\-3&2&-1\end{vmatrix}=0.\rightarrow \text{rango de } A^*=3.$$

Las dos rectas se cortan en un punto.

31. Estudia la posición relativa de las rectas $r\begin{cases}\mathbf{x+ky=3}\\ \mathbf{2x-z=1}\end{cases}$ $\quad s\begin{cases}\mathbf{x=1+\alpha}\\ \mathbf{y=-\alpha}\\ \mathbf{z=-4-\alpha}\end{cases}$

VER VÍDEO https://youtu.be/c2_hWKrnGwY

● Otra forma. Tomamos la matriz $M=\begin{pmatrix}\overrightarrow{PrPs}\\ \overrightarrow{Vr}\\ \overrightarrow{Vs}\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}\overrightarrow{Vr}\\ \overrightarrow{Vs}\end{pmatrix}$

Si $|M|\neq 0$ las rectas se cruzan.

Si $|M| = 0$ las rectas son coplanarias.
$$\begin{cases}\text{Rango } M=2=\text{Rango de } N\rightarrow \text{se cortan}\\ \overrightarrow{Vr}\ \overrightarrow{Vs}\ \text{no proporcionales}\rightarrow\text{se cortan}\\ \text{Rango } M=2;\ \text{Rango de } N=1\rightarrow\text{paralelas}\\ \begin{cases}\overrightarrow{Vr}\ \overrightarrow{Vs}\ \text{proporcionales}\\ \overrightarrow{Vr}\text{ y }\overrightarrow{PrPs}\ \text{no proporcionales}\end{cases}\rightarrow\text{paralelas}\\ \text{Rango } M=1=\text{Rango de } N\rightarrow\text{coincidentes}\\ \begin{cases}\overrightarrow{Vr}\ \overrightarrow{Vs}\ \text{proporcionales}\\ \overrightarrow{Vr}\text{ y }\overrightarrow{PrPs}\ \text{proporcionales}\end{cases}\rightarrow\text{coincidentes}\end{cases}$$

En rojo y en negro dos formas distintas de estudiar la posición relativa.

32. Estudiar la posición relativa de las rectas, según los valores del parámetro k,

$$\mathbf{r: x-k=\frac{y+1}{2k-1}=\frac{z}{2}\ \text{y}\ s:\ \frac{x}{k+1}=\frac{y-2}{-1}=z+2}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/6t5fAQcy-cY

P_r= (k, - 1, 0) y $\vec{v_r}$= (1, 2k – 1, 2)

P_s= (0, 2, - 2) y $\vec{v_s}$= (k + 1, - 1, 1)

$M=\begin{pmatrix}\overrightarrow{P_rP_s}\\ \vec{v_r}\\ \vec{v_s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k & 3 & -2\\ 1 & 2k-1 & 2\\ k+1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Resolviendo el determinante de M e igualándolo a cero se obtiene k = - 3 y $k=\frac{-1}{2}$.

Si k≠- 3 y $k\neq\frac{-1}{2}$, el $|M|\neq 0$, las rectas se cruzan.

Si k = - 3; $M=\begin{pmatrix}3 & 3 & -2\\ 1 & -7 & 2\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $|M|=0$ y los vectores no son proporcionales. Se cortan.

Si $k=\frac{-1}{2}$; $M=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 3 & -2\\ 1 & -2 & 2\\ \frac{1}{2} & -1 & 1\end{pmatrix}$, $|M|=0$ y los vectores son proporcionales, pero no las dos primeras filas. Son paralelas.

33. Comprobar que las rectes r y s se cortan en un punto. Halla también la ecuación general del plano que determinan. r: (x,y,z) = (3,- 4,0) + a(2,-3,-2) y s: (x,y,z) = (-7,1,2) + b(4,-1,0)
VER VÍDEO https://youtu.be/mpDSXgC-4j0

Observando los vectores directores vemos que las rectas o se cortan o se cruzan.

Pues, no son paralelas. $M=\begin{pmatrix}\overrightarrow{P_rP_s}\\ \vec{v_r}\\ \vec{v_s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -5 & -2\\ 2 & -3 & -2\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$. $|M|=0$ →Las rectas se cortan.

Buscamos la ecuación general del plano α que determinan.

$$\alpha\begin{cases}\text{contiene a } P_r=(3,-4,0)\\ \text{sus vectores}\begin{cases}\vec{v_r}=(2,-3,-2)\\ \vec{v_s}=(4,-1,0)\end{cases}\end{cases}$$

$$\alpha:\begin{vmatrix}x-3 & y+4 & z\\ 2 & -3 & -2\\ 4 & -1 & 0\end{vmatrix}=0.\ \alpha: x+4y-5z+13=0$$

● Otra forma, si están en paramétricas:

*Si los vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes. Igualando las ecuaciones tenemos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Si el sistema es incompatible las rectas son paralelas, si no son coincidentes.

*Si los vectores no son proporcionales, las rectas se cruzan o se cortan. Igualando las ecuaciones tenemos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Si el sistema es compatible determinado las rectas se cortan, si no se cruzan.

34. Dadas las rectas: $r\begin{cases}x+y=3\\ 2x-z=1\end{cases}\quad s\begin{cases}x=1+\alpha\\ y=-\alpha\\ z=-4-\alpha\end{cases}$

a. Calcula la ecuación vectorial de la recta r

b. Calcula la posición relativa de las rectas r y s.

c. Calcula la ecuación general del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto P(2,0,-1)

d. Calcula la ecuación general del plano paralelo a la recta r que contiene la recta s.

VER VÍDEO https://youtu.be/9X2nWltiHbE

35. Demuestra que las rectas r y s se cortan y halla el punto de corte.

$$r:\frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{5}=z \text{ y } s:\begin{cases}x=1-t\\ y=2t\\ z=5\end{cases}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/dNsJIxK8OmE

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x = 2-3a \\ y = 3+5a \\ z = a \end{cases} \\ s:\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = 5 \end{cases} \end{array}\right\}\begin{cases} 2-3a = 1-t \\ 3+5a = 2t \\ a = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \overbrace{a = 5}^{\text{se cortan}} \\ t = 14 \end{cases} \rightarrow (-13,28,5)$$

36. Sabemos que las rectas siguientes se cortan en un punto. Hallar el valor de k y la ecuación general del plano que determinan.

$$\mathbf{r}: \frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{y+k}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{z-1}}{\mathbf{-2}} \ \mathbf{y\ s: x} = \frac{\mathbf{y+3}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{z-k}}{\mathbf{3}}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/jo_0YlMZ--w

P_r= (- 1, - k, 1), $\vec{v_r} = (2,3,-2)$, P_s= (0, - 3, k) y $\vec{v_s} = (1,2,3)$. Las rectas no son paralelas pues sus vectores no son proporcionales. Se cortan o se cruzan.

$$M = \begin{pmatrix} \overrightarrow{Pr\,Ps} \\ \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k-3 & k-1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.\ |M| = 36 - 7k = 0,\ k = \frac{36}{7}.\begin{cases} \text{Si } k \neq \frac{36}{7} \text{ se cruzan.} \\ \text{Si } k = \frac{36}{7} \text{ se cortan.} \end{cases}$$

$$\text{El plano } \pi: \begin{cases} \text{Contiene}Pr = \left(-1, \frac{36}{7}, 1\right) \\ \text{tiene como vectores } \begin{cases} \vec{v_r} = (2,3,-2) \\ \vec{v_s} = (1,2,3) \end{cases} \end{cases} \pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-\frac{36}{7} & z-1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

91x – 56y + 7z – 204 = 0

37. Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a las rectas: r : x = 2y = z − 1, s : 3x = 2y − 2 = 6z.

VER VÍDEO https://youtu.be/KslIyg0XeA8

$$r: x = 2y = z-1 \rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{\alpha}{2} \\ z = 1+\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_r = (0,0,1) \\ \vec{v_r} = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right) \rightarrow (2,1,2) \end{cases}$$

$$s: 3x = 2y-2 = 6z \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\beta}{3} \\ y = 1+\frac{\beta}{2} \\ z = \frac{\beta}{6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_s = (0,1,0) \\ \vec{v_s} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right) \rightarrow (2,3,1) \end{cases}$$

$$\text{Recta t:}\begin{cases}\text{Pasa por }(0,0,0)\rightarrow \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\\ \text{corta a r}\rightarrow \begin{vmatrix}\overrightarrow{P_tP_r}\\ \overrightarrow{v_t}\\ \overrightarrow{v_r}\end{vmatrix}=0\rightarrow \begin{vmatrix}0&0&1\\a&b&c\\2&1&2\end{vmatrix}=0\rightarrow a-2b=0\rightarrow a=2b\\ \text{corta a s}\rightarrow \begin{vmatrix}\overrightarrow{P_tP_s}\\ \overrightarrow{v_t}\\ \overrightarrow{v_s}\end{vmatrix}=0\rightarrow \begin{vmatrix}0&1&0\\a&b&c\\2&3&1\end{vmatrix}=0\rightarrow a-2c=0\rightarrow c=\frac{a}{2}=b\end{cases}$$

$$v_t=(2b,b,b)\rightarrow(2,1,1)\rightarrow \text{La recta es:}\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}\rightarrow\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=t\end{cases}$$

6. DISTANCIAS.

a. DISTANCIA PUNTO – PUNTO.

La distancia de A a B es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$

38. a. Calcular la distancia entre los puntos A (1, 0, 3) y B (2, - 1, 2).
b. Hallar k para que la distancia de P (k, 1, 0) a Q (2, - 1, - 2) sea 3 u.
VER VÍDEO https://youtu.be/6RS8YVLLnU8

Distancia de A a B = $\left|\overrightarrow{AB}\right|=|(1,-1,-1)|=\sqrt{\mathbf{3}}\,\mathbf{u}.$

39. Determinar los puntos A, B y C de la recta r que están en los planos de coordenadas y determinar cuál de los tres puntos, A, B o C, está situado entre los otros dos.

$$\mathbf{r: x-12=\frac{y+6}{2}=\frac{z-6}{3}}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/Iu0R8u3Auro

$$r: x-12=\frac{y+6}{2}=\frac{z-6}{3}\begin{cases}\underbrace{\text{plano XY}(z=0)}_{A(10,-10.0)}\begin{cases}x-12=\frac{0-6}{3}\rightarrow x=10\\ \frac{y+6}{2}=\frac{0-6}{3}\rightarrow y=-10\end{cases}\\ \underbrace{\text{plano XZ}(y=0)}_{B(15,0,15)}\begin{cases}x-12=\frac{0+6}{2}\rightarrow x=15\\ \frac{z-6}{3}=\frac{0+6}{2}\rightarrow z=15\end{cases}\\ \underbrace{\text{plano YZ}(x=0)}_{C(0,-30,-30)}\begin{cases}0-12=\frac{y+6}{2}\rightarrow y=-30\\ 0-12=\frac{z-6}{3}\rightarrow z=-30\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left|\overrightarrow{AB}\right|=|(5,10,15)|=5\sqrt{14}\cong 18{,}7\\ \left|\overrightarrow{AC}\right|=|(-10,-20,-30)|=10\sqrt{14}\cong 37{,}42\rightarrow \text{B y C son los extremos.}\\ \left|\overrightarrow{BC}\right|=|(-15,-30,-45)|=15\sqrt{14}\cong 56{,}12\end{cases}$$

A se encuentra entre ellos

40. Hallar un punto de la recta r: x = y = z que esté a distancia 3 del origen.
VER VÍDEO https://youtu.be/_FOQKlETLMs

Si nos preguntan hallar un punto que pertenece a una recta hacemos **punto genérico**.

Punto genérico de r: paramétricas de r: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \rightarrow$ punto generico R = (t, t, t)

Distancia de (t, t, t) a (0, 0, 0) = 3 → $|\overrightarrow{RO}| = 3 \rightarrow \sqrt{t^2 + t^2 + t^2} = 3 \rightarrow 3t^2 = 9 \rightarrow$

$$\rightarrow t = \pm\sqrt{3} \rightarrow \text{los puntos son} \begin{cases} (\sqrt{\mathbf{3}}, \sqrt{\mathbf{3}}, \sqrt{\mathbf{3}}) \\ (-\sqrt{\mathbf{3}}, -\sqrt{\mathbf{3}}, -\sqrt{\mathbf{3}}) \end{cases}$$

41. Hallar los puntos de la recta (x, y, z) = (1, 1, 2) + t·(2, 2, 1) que equidistan de A (1, 2, 3) y B (3, 2, 1).
VER VÍDEO https://youtu.be/bAoslbvbozI

Punto (3, 3, 3)

b. DISTANCIA PUNTO – PLANO.

Fórmula de la distancia del punto P (a, b, c) al plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

$$\mathbf{d(P, \pi)} = \left| \frac{\mathbf{Aa + Bb + Cc + D}}{\sqrt{\mathbf{A^2 + B^2 + C^2}}} \right|$$

42. a. Calcular la distancia del punto A (2, 3, 4) al plano π ≡ x + 3y – 2z = 0
b. Hallar k para que el punto (1, 1, 1) diste 3 u. del plano x – y – z = k.
VER VÍDEO https://youtu.be/45fiJBqj4L8

$$d(A, \pi) = \left| \frac{1.2 + 3.3 - 2.4}{\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}} \right| = \frac{3}{\sqrt{14}} u.$$

$k = -1 - 3\sqrt{3}$ y $k = 3\sqrt{3} - 1$

43. Hallar los puntos de la recta r: (x, y, z) = (1, 2, 4) + t.(2, –1, 3) que disten 4 unidades del plano π ≡ x + y + 2z = 1.
VER VÍDEO https://youtu.be/xezDokYxEDA

Si nos preguntan hallar un punto que pertenece a una recta hacemos **punto genérico**.

Punto genérico de r: paramétricas de r: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases} \rightarrow$ punto generico

$$R\ (1 + 2t, 2 - t, 4 + 3t)$$

$$d(R\ a\ \pi) = \left| \frac{1 + 2t + 2 - t + 2.(4 + 3t) - 1}{\sqrt{1 + 1 + 4}} \right| = \left| \frac{7t + 10}{\sqrt{6}} \right| = 4 \begin{cases} 7t + 10 = 4\sqrt{6} \\ t = \dfrac{4\sqrt{6} - 10}{7} \\ 7t + 10 = -4\sqrt{6} \\ t = \dfrac{-4\sqrt{6} - 10}{7} \end{cases}$$

Sustituyendo t en R tendríamos los dos puntos

44. Determine el plano π de ecuación de kx - (1 + k) y + 2Z - 1 = 0 tal que la distancia entre π y el punto (-1 , 0, 1) sea igual a 1.
VER VÍDEO https://youtu.be/TaGEafOHLcs

Aplicando la fórmula de distancia de un punto a un plano:

$$D\left[(-1,0,1);\ kx - (1+k)y + 2z - 1 = 0\right] = 1;\ \frac{|-k+2-1|}{\sqrt{k^2+(1+k)^2+2^2}} = 1;$$

$$\frac{|1-k|}{\sqrt{2k^2+2k+5}} = 1;$$ elevando al cuadrado, $1 - 2k + k^2 = 2k^2 + 2k + 5$,

$k^2 + 4k + 4 = 0$; de donde k = -2.

π: -2x + y + 2z – 1 = 0

45. Determine los puntos de la recta r que equidistan los planos α: 3x + 4y = 1 y β: 4x - 3z = 1

$$\mathbf{r:\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/3WgrEMF3xD0

Si me preguntan hallar un punto que pertenece a una recta hacemos punto genérico.

Sea P = (1 + 2t, - 1 + 3t, - 2 + 2t) el punto genérico de r. Distancia de P a α = distancia de P a β.:

$$\left|\frac{3.(1+2t)+4.(-1+3t)-1}{5}\right| = \left|\frac{4.(1+2t)-3.(-2+2t)-1}{5}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow |18t-2| = |9+2t| \rightarrow \begin{cases} 18t-2 = 9+2t \rightarrow t = \dfrac{11}{16} \\ 18t-2 = -9-2t \rightarrow t = \dfrac{-7}{20} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{19}{8}, \dfrac{17}{16}, \dfrac{-5}{8}\right) \\ \left(\dfrac{3}{10}, \dfrac{-41}{20}, \dfrac{-27}{10}\right) \end{cases}$$

46. Hallar la ecuación implícita (o general) del plano que contiene la recta (x, y, z) = (1,2, – 1) + t (– 1, 1, 2) y es paralela a la recta que pasa por los puntos a = (0, 1, 2) y b = (1, – 1,1). Calcule la distancia desde el origen de coordenadas hasta este plano.
VER VÍDEO https://youtu.be/LXkFFZsvv8U

$$\pi \begin{cases} \text{contiene a r} \begin{cases} P_r = P_\pi = (1,2,-1) \\ \overrightarrow{V_r} = \overrightarrow{V_\pi} = (-1,1,2) \end{cases} \\ \overrightarrow{AB} = (1,-2,-1) = \overrightarrow{U_\pi} \end{cases};\ \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0;\ 3x+y+z = 4$$

$$d(\pi \text{ a } (0,0,0)) = \left|\frac{-4}{\sqrt{9+1+1}}\right| = \frac{4}{\sqrt{11}} u.$$

47. Calcule los puntos de la recta r que están la distancia 1 del plano π.

$$\mathbf{r \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2};\ \pi \equiv x + y + z = 0}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/RFvTM4HuGsY

Punto genérico de la recta: Q = (- 2 + 3t, - t, 2t).

Distancia de Q a $\pi = \left|\frac{-2+3t-t+2t}{\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{4t-2}{\sqrt{3}}\right| = 1 \rightarrow |4t-2| = \sqrt{3}$

$$\rightarrow \begin{cases} 4t-2=\sqrt{3} \\ t=\dfrac{\sqrt{3}+2}{4} \\ 4t-2=-\sqrt{3} \\ t=\dfrac{-\sqrt{3}+2}{4} \end{cases}$$

Sustituyendo la t en Q obtenemos los puntos buscados.

48. Demostrar que el punto A = (−1,1,0) no es coplanario con los punts B = (0,0,0), C = (0,1,0) y D = (1,2,1) . Calcular la distancia de A al plano determinado por B, C y D .
VER VÍDEO https://youtu.be/3-wnuPezAlc

Si $\begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AD} \end{vmatrix} \begin{cases} =0 \rightarrow \text{coplanarios} \\ \neq 0 \rightarrow \text{no coplanarios} \end{cases}$. Son no coplanarios. La ecuación del plano es x-z = 0.

La distancia es $\frac{\sqrt{2}}{2}$u.

b. DISTANCIA PLANO – PLANO.

Si los planos se cortan en una recta o son coincidentes la distancia entre ellos es 0. Si los planos son paralelos tomamos un punto de uno de los planos y hacemos distancia punto plano.

49. Dado el plano π: kx + 2y – 3z = t, hallar k y t sabiendo que el plano dado dista 3 unidades del plano π': 2x + 4y – 6z + 2 = 0
VER VÍDEO https://youtu.be/xM7PhjjOD40

Si la distancia entre los planos es 3 unidades significa que son paralelos. Por tanto, $n_\pi \backslash\backslash n_{\pi'}$.

$\frac{k}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \rightarrow k = 1.$

Hallamos un punto de π': $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\dfrac{1}{3} \end{cases} \rightarrow P = \left(0,0,\frac{1}{3}\right)$

Distancia de P a $\pi = 3 \rightarrow \left|\frac{-1-t}{\sqrt{1+4+9}}\right| = 3 \rightarrow |-1-t| = 3\sqrt{14}$

$$\rightarrow \begin{cases} -1-t=3\sqrt{14} \\ t=-1-3\sqrt{14} \\ -1-t=-3\sqrt{14} \\ t=-1+3\sqrt{14} \end{cases}$$

c. DISTANCIA PLANO – RECTA.

Si el plano y la recta se cortan o la recta está contenida en el plano la distancia es 0.
Si son paralelos, tomamos un punto de la recta y hacemos distancia punto plano.

50. Hallar la distancia de la recta r al plano π.

a) r : $\begin{cases} \mathbf{x=1+t} \\ \mathbf{y=t} \\ \mathbf{z=1-t} \end{cases}$ $\mathbf{y\ \pi: x+2y+3z=6}$

b) r: (x, y, z) = (0, 1, 2) + t(1, 1, − 2) y π: 2x – y + z = 2

VER VÍDEO https://youtu.be/EXnNjgo098Y

a) Estudiamos la posición de r y π.

1 + t + 2t + 3 - 3t = 6 → la t desaparece y queda 3 = 6 (incompatible). El plano y la recta son paralelos.

Un punto de la recta P = (1, 0 , 1).

Distancia de P a π $= \left|\dfrac{1+3-6}{\sqrt{1+4+9}}\right| = \dfrac{2}{\sqrt{14}}$ unidades.

b) Estudiamos la posición de r y π.

2t – 1 – t + 2 – 2t = 2 → t = 1 → se cortan en un punto. La distancia es 0.

51. Determina m para que la recta r sea paralela a π. Calcular la distancia entre ellos.

$\mathbf{r: \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{m}=\dfrac{z+3}{3}};\ \mathbf{\pi: x+y-z=5}$

VER VÍDEO https://youtu.be/7l6d2X9UUYI

a. Si el plano es paralelo a la recta, el vector normal del plano es perpendicular al vector director de la recta.

$v_r \cdot n_\pi = 0 \rightarrow (-1, m, 3)\cdot(1,1,-1) = -1+m-3=0 \rightarrow m=4$

b. La distancia recta plano es la distancia de un punto de la recta al plano.

$d(r,\pi) = d(R,\pi) = d(R(0,-1,-3), x+y-z-5=0) = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}u.$

52. Hallar k sabiendo que la distancia de $\mathbf{r:}\begin{cases} \mathbf{x=0} \\ \mathbf{y=k+t} \\ \mathbf{z=1-t} \end{cases}$ **al plano π : y + z = 0 es 2.**

VER VÍDEO https://youtu.be/Rwp8Av_urOA

Punto de r: R = (0, k, 1)

Distancia de R a π es 2 $\rightarrow \left|\frac{k+1}{\sqrt{2}}\right| = 2 \rightarrow \left|\frac{k+1}{\sqrt{2}}\right| = 2 \rightarrow \begin{cases} \frac{k+1}{\sqrt{2}} = 2 \\ k = 2\sqrt{2}-1 \\ \frac{k+1}{\sqrt{2}} = -2 \\ k = -2\sqrt{2}-1 \end{cases}$

d. DISTANCIA PUNTO – RECTA.

Sea el punto P y la recta r. Tomamos un punto Q de la recta y un vector director de la recta $\vec{v_r}$

$$\text{Distancia de P a r} = \frac{\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ & \overrightarrow{QP} & \\ & \vec{v_r} & \end{vmatrix}\right\|}{|\vec{v_r}|}$$

53. **a. Hallar la distancia de A = (2, 2, - 1) a r:** $\begin{cases} \mathbf{x = 1} \\ \mathbf{y = 2} \end{cases}$

b. Hallar a para que la distancia de la recta r al punto P = (0, 0, - 1) sea 2.

$$\mathbf{r:\ \frac{x}{2} = \frac{y-a}{-1} = \frac{z}{0}}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/Xcrcm-y2QnM

r en paramétricas r: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Punto de r: } (1,2,0) \\ \vec{v_r} = (0,0,1) \end{cases}$

$$d(a,r) = \frac{\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right\|}{1} = \frac{|(0,1,0)|}{1} = 1$$

r: $\begin{cases} Q = (0,a,0) \\ \vec{v_r} = (2,-1,0) \end{cases}$

$$d(P,r) = 2;\ \frac{\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{4+1}} = 2;\ \frac{|(1,2,2a)|}{\sqrt{5}} = 2;\ \sqrt{1+4+4a^2} = 2\sqrt{5}; 5 + 4a^2 = 20 \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{15}{4}}$$

54. Calcular el área del cuadrado que tiene un lado sobre la recta r y uno de sus vértices es

$\mathbf{P = (0,0,-1). r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{0}}$

VER VÍDEO https://youtu.be/NEjP751JMu0

El lado del cuadrado será la distancia de P a r.

$$r: \begin{cases} Q = (0,1,0) \\ \vec{v_r} = (2,-1,0) \end{cases}$$

$$d(P,r) = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|(1,2,2)|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{1+4+4}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}};$$

El área del cuadrado es $\frac{9}{5}u^2$.

55. Sean los puntos A = (1,1,0) i B = (0,1,2). Determinar el punto C sobre la recta (x,y,z) = (0,1,1) + t(1,0,1) situado a distancia $2\sqrt{2}$de la recta que pasa por A y B.

VER VÍDEO https://youtu.be/ZB5XlssrJ8k

El punto genérico de la recta dada es C = (t, 1, 1+t).

$$\text{Distancia de P a r} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ & \overrightarrow{QP} & \\ & \overrightarrow{v_{AB}} & \end{vmatrix} \right\|}{|\overrightarrow{v_{AB}}|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ t-1 & 0 & 1+t \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{5}} = \frac{|(0,1-3t,0)|}{\sqrt{5}} = \frac{|1-3t|}{\sqrt{5}}$$
$$= 2\sqrt{2}.$$

Por tanto $t = \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{3}$; sustituyendo en C hallarás los puntos.

e. DISTANCIA RECTA – RECTA.

Si las rectas se cortan o coinciden la distancia es 0.
Si las rectas son paralelas hacemos distancia de un punto de una recta a la otra.
Si las rectas se cruzan:

$$\textbf{Distancia de r a s} = \left| \frac{\begin{vmatrix} \overrightarrow{RS} \\ \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \end{vmatrix}}{|\vec{v_r} x \vec{v_s}|} \right| ; \textbf{R es un punto de r y S de s}$$

56. Calcular la distancia de r a s.

$$\mathbf{r: \begin{cases} z + y = 5 \\ z = 4 \end{cases} \quad y \ s: \begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/2aaNmYMmpQQ

$$r:\begin{cases} z+y=5 \\ z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_r=(0,1,4) \\ \vec{v_r}=(1,0,0) \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} 2x-z=3 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \\ z=2\alpha-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_s=(0,0,-3) \\ \vec{v_s}=(1,0,2) \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos rectas.

$$d(r,s)=\frac{\left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{P_rP_s} \\ \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \end{vmatrix}\right|}{|\vec{v_r}x\vec{v_s}|}=\frac{\left|\begin{vmatrix} 0 & -1 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}\right|}{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}\right|}=\frac{2}{|(0,-2,0)|}=\frac{2}{2}=1 \text{ u.}$$

57. Dadas las rectas r y s:

a. Demostrar que se cruzan.

b. Calcula la distancia entre ellas.

$$\mathbf{r}:\frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{3}}=\frac{\mathbf{z+1}}{\mathbf{-1}} \text{ y } \mathbf{s}:\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1}}=\frac{\mathbf{y-2}}{\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{z+1}}{\mathbf{-2}}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/o0xwk3yr0L4

a.

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}\begin{cases} Pr=(1,0,-1) \\ \vec{vr}=(2,3,-1) \end{cases}$$

$$s:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-2}\begin{cases} Ps=(0,2,-1) \\ \vec{vs}=(1,2,-2) \end{cases}$$

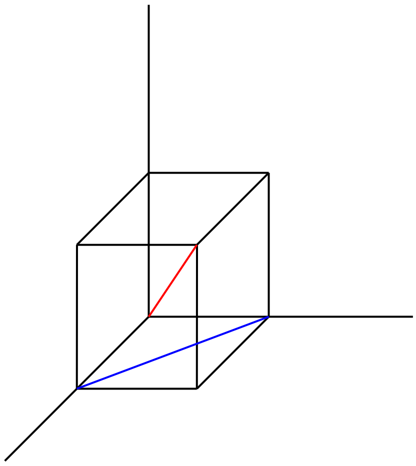
$$M=\begin{pmatrix} \overrightarrow{PrPs} \\ \vec{vr} \\ \vec{vs} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow |M|\neq 0 \rightarrow \text{Se cruzan.}$$

b.

$$\text{Distancia de r a s }=\left|\frac{\begin{vmatrix} \overrightarrow{RS} \\ \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \end{vmatrix}}{|\vec{v_r}x\vec{v_s}|}\right|; D=\left|\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}\right|=\left|\frac{10}{|(-4,3,1)|}\right|=\frac{10}{\sqrt{26}} \text{ u.}$$

59. Dado un cubo de lado 1 dm., se considera una de sus diagonales y la diagonal de una de sus caras de forma que no tengan ningún punto en común. Calcula la distancia entre las diagonales.

VER VÍDEO https://youtu.be/49qUWRXjeYU



La recta roja es una diagonal del cubo. Une los puntos A (0,0,0) y B (1,1,1).
La recta azul es la diagonal de una de las caras. Une los puntos C (0,1,0) y D (1,0,0)

Basta aplicar la fórmula de la distancia entre rectas y nos da: $\frac{1}{\sqrt{6}}$u.

60. Hallar a sabiendo que la distancia de r a s es 2 u.

$$\mathbf{r}: \begin{cases} \mathbf{x = t} \\ \mathbf{y = a} \\ \mathbf{z = 1 + t} \end{cases} \quad \mathbf{y\ s}: \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{y+1}}{\mathbf{-1}} = \mathbf{z}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/aAZuqzvAdeQ

Recta r $\begin{cases} R = (0, a, 1) \\ \vec{v_r} = (1,0,1) \end{cases}$

Recta s $\begin{cases} S = (0, -1, 0) \\ \vec{v_s} = (2, -1, 1) \end{cases}$

$$\text{Distancia } r, s = \left| \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1-a & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}} \right| = 2u. \rightarrow \left| \frac{-a}{\sqrt{3}} \right| = 2 \rightarrow a = \pm 2\sqrt{3}$$

7. RECTA PERPENDICULAR COMÚN.

61. Hallar la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas r: x = y = z , s: x = y + 1 = 2z – 2

VER VÍDEO https://youtu.be/4eIqesmaLpM

Ojo con la recta s. $x = y + 1 = \frac{z-1}{1/2} \begin{cases} S = (0, -1, 1) \\ \vec{v_s} = \left(1, 1, \frac{1}{2}\right) \overset{x2}{\rightarrow} (2,2,1) \end{cases}$

$\begin{cases}\text{Punto genérico de r: } R=(p,p,p)\\ \text{Punto genérico de s: } S=(2t,-1+2t,1+t)\end{cases}; \overrightarrow{RS}=(2t-p,-1+2t-p,1+t-p)$

$\overrightarrow{RS}\perp\overrightarrow{v_r}\to\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{v_r}=0\to 2t-p-1+2t-p+1+t-p=0\to 5t-3p=0$

$\overrightarrow{RS}\perp\overrightarrow{v_s}\to\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{v_s}=0\to 4t-2p-2+4t-2p+1+t-p=0\to 9t-5p-1=0$

Resolviendo el sistema $\begin{cases}p=\frac{5}{2}\\ t=\frac{3}{2}\end{cases}\to\begin{cases}R=\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)\\ S=\left(3,2,\frac{5}{2}\right)\\ \overrightarrow{RS}=\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},0\right)\end{cases}$

La recta que pasa por S y tiene la dirección de $\overrightarrow{RS}$ es la recta perpendicular común a r y s, es decir es la recta que corta a r y s perpendicularmente.

La recta buscada es: $\left.\begin{matrix}S=\left(3,2,\frac{5}{2}\right)\\ \overrightarrow{RS}=\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},0\right)\xrightarrow{x2}(1,-1,0)\end{matrix}\right\}\begin{cases}x=3+t\\ y=2-t\\ z=\frac{5}{2}\end{cases}$

62. Se consideran las rectas $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+2}{1}$ y $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{-3}$

a) Demostrar que se cortan.

b) Determinar un vector director de la recta perpendicular común a las dos rectas. Hallar dicha recta.

VER VÍDEO https://youtu.be/pmb-PCI9uZA

(- 13, 12, 3)

8. ÁNGULOS.

a. ÁNGULO RECTA – RECTA.

$$\cos\alpha=\left|\frac{\overrightarrow{v_r}.\overrightarrow{v_s}}{|\overrightarrow{v_r}|.|\overrightarrow{v_s}|}\right|$$

63. a. Hallar el ángulo que forman r y s.

$$\mathbf{r:(x,y,z,)=(1,1,1)+a\cdot(2,-1,-1)\ y\ s:\frac{x}{1}=\frac{2-y}{2}=\frac{z}{3}}$$

b. Hallar a sabiendo que las rectas r y s forman un ángulo de 45º.

$$\mathbf{r:\begin{cases}x=t\\ y=1\\ z=1-t\end{cases}}\quad \text{y s: (x,y,z) = (1,0,2) + }\alpha\text{.(- 1,3,a)}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/ScV5GFRYBKU

$\overrightarrow{v_r}=(1,0,-1)$ y $\overrightarrow{v_s}=(-1,3,a)$

$$\cos\alpha = \left|\frac{\vec{v_r}.\vec{v_s}}{|\vec{v_r}|.|\vec{v_s}|}\right| = \left|\frac{(1,0,-1).(-1,3,a)}{\sqrt{2}.\sqrt{10+a^2}}\right| = \left|\frac{-1-a}{\sqrt{20+2a^2}}\right|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \overset{\text{elevando al cuadrado}}{\rightleftarrows} \frac{1+2a+a^2}{20+2a^2} = \frac{1}{2}$$

De donde $a = \frac{9}{2}$

b. ÁNGULO PLANO – PLANO.

$$\cos\alpha = \left|\frac{\vec{n_\pi}.\vec{n_{\pi'}}}{|\vec{n_\pi}|.|\vec{n_{\pi'}}|}\right|$$

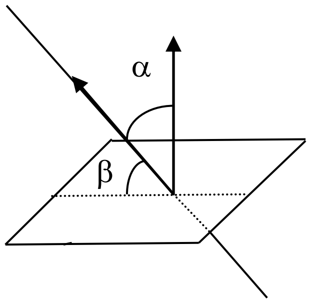
64. **a. Hallar el ángulo que forman α: $x + y + z = 3$ y β: $2x - 3y + z = 0$**
b. Hallar a sabiendo que los planos π y π' forman un ángulo de 45°.π: $3x + 2y = 0$ y π': $x - 2y + az = 0$
VER VÍDEO https://youtu.be/Fqf8Htz0odE

$$\cos\alpha = \left|\frac{\vec{n_\pi}.\vec{n_{\pi'}}}{|\vec{n_\pi}|.|\vec{n_{\pi'}}|}\right| = \left|\frac{(3,2,0).(1,-2,a)}{\sqrt{13}.\sqrt{5+a^2}}\right| = \left|\frac{-1}{\sqrt{65+13a^2}}\right|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \overset{\text{elevando al cuadrado}}{\rightleftarrows} \frac{1}{65+13a^2} = \frac{1}{2}$$

De donde a no tiene solución. Los planos dados no pueden formar un ángulo de 30°

c. ÁNGULO RECTA – PLANO.



$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta = \left|\frac{\vec{v_r}.\vec{n_\pi}}{|\vec{v_r}|.|\vec{n_\pi}|}\right|$$

65. Determinar m para que la recta r y el plano π formen un ángulo de 45º y calcular el punto de intersección entre la recta y el plano.

$$\mathbf{r}: \frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1} \ \text{ i } \pi: x + 2y + mz = 6$$

VER VÍDEO https://youtu.be/xap0jIs4NfM

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta = \left|\frac{\vec{v_r}.\vec{n_\pi}}{|\vec{v_r}|.|\vec{n_\pi}|}\right|; \operatorname{sen} 45º = \frac{\sqrt{2}}{2} = \left|\frac{(0,1,1).(1,2,m)}{\sqrt{2}.\sqrt{5+m^2}}\right| = \left|\frac{2+m}{\sqrt{10+2m^2}}\right| \rightarrow$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{2+m}{\sqrt{10+2m^2}}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}=\frac{4+4m+m^2}{10+2m^2} \rightarrow m=\frac{1}{4}$$

La recta y el plano se cortan en el punto $\left(1,\frac{16}{9},\frac{52}{9}\right)$

66. Calcula el ángulo que forman el plano ABC, A=(1,1,1),B=(2,1,3),C=(0,0,3) y el eje X.
VER VÍDEO https://youtu.be/uG0I8xhiLsU

$$\text{Plano ABC:}\begin{cases}\text{pasa por } A(1,1,1)\\ \text{vectores directores}\begin{cases}\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(1,0,2)\\ \vec{u}=\overrightarrow{AC}=(-1,-1,2)\end{cases}\end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0$$

Plano ABC: $2x-4y-z+3=0 \rightarrow \vec{n}=(2,-4,-1)$
Eje X: $\vec{v}=(1,0,0)$

$$\operatorname{sen}\alpha=\left|\frac{\overrightarrow{v_r}.\overrightarrow{n_{\pi'}}}{|\overrightarrow{v_r}|.|\overrightarrow{n_{\pi'}}|}\right|$$

9. ÁREA DEL PARALELOGRAMO ABCD Y DEL TRIÁNGULO ABC.

$$\textbf{Área}_{\textbf{paralelogramo}}=\left|\left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\mathbf{x}\overrightarrow{\mathbf{AC}}\right|\right|.\ \textbf{Área}_{\textbf{triángulo}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left|\left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\mathbf{x}\overrightarrow{\mathbf{AC}}\right|\right|$$

67. Del paralelogramo (cuadrilátero que tiene los lados opuestos paralelos) ABCD, se conocen los vértices consecutivos A(1,0.-1), B(2,1,0) y C(4,3,- 2)

a. Calcula el coseno del ángulo que forman los vectores AB y AC.
b. Calcula las coordenadas del punto medio del segmento AC.
c. Calcula las coordenadas del vértice D.
d. Calcula el área del paralelogramo ABCD.

VER VÍDEO https://youtu.be/qdYxwcUcGyY

68. Consideramos los puntos A(0; 0; 0), B(1; 1; 0) i C(0; 1; 1): calcula el área del triángulo que forman los puntos ABC y determina el ángulo que forman los vectores AB y AC
VER VÍDEO https://youtu.be/55gubqWvbhI

$$\left.\begin{matrix}AB=(1,1,0)\\ AC=(0,1,1)\end{matrix}\right\}\begin{cases}\text{Área ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot|(1,-1,1)|=\frac{\sqrt{3}}{2}u^2\\ \cos\alpha=\frac{AB\cdot AC}{|AB|\cdot|AC|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\rightarrow\alpha=60°\end{cases}$$

69. Consideramos la recta r y el plano π. Calcula el área del triángulo formado por el punto (A) de corte entre la recta y el plano, el punto B = (1, – 1, 1) de la recta y el punto (C) proyección ortogonal de este sobre el plano.

$$\mathbf{r:\ \frac{x-1}{2} = y+1 = -z+1\ y\ \pi: x-y=0}$$

VER VIDEO https://youtu.be/6ju1D3mYvsM

Punto A:

$$r: \frac{x-1}{2} = y+1 = -z+1 \rightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = 1-t \end{cases}; \text{Sustituir } x, y \text{ y } z \text{ en } \pi$$

$$1+2t+1-t=0; t=-2 \rightarrow (-3,-3,3)$$

Punto B (1, – 1, 1)

Punto C:

$$\text{recta s:} \begin{cases} \text{Pasa por } (1,-1,1) \\ \perp \text{ a } \pi \rightarrow \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{n_\pi} = (1,-1,0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1+a \\ y = -1-a \\ z = 1 \end{cases}; \text{ Sustituir } x, y \text{ y } z \text{ en } \pi$$

$$1 + a + 1 + a = 0 \rightarrow a = -1 \rightarrow C = (0, 0, 1)$$

Área del triángulo ABC:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |(2,2,6)| = \frac{\sqrt{4+4+36}}{2} = \sqrt{11}\ u^2$$

70. El plano perpendicular al punto medio del segmento de extremos P(0, 3, 8) y Q(2, 1, 6) corta a los ejes de coordenadas en los puntos A, B y C. Halla el área del triángulo ABC.

VER VIDEO https://youtu.be/dKwHS_wRoVk

$$\pi \begin{cases} \perp \overrightarrow{PQ} = (2,-2,-2) \\ \text{Pasa por } M_{PQ} = (1,2,7) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-2y-2z+D=0 \\ 2\cdot 1 - 2\cdot 2 - 2\cdot 7 + D = 0 \rightarrow D = 16 \\ \pi: 2x-2y-2z+16=0 \rightarrow x-y-z+8=0 \end{cases}$$

$$\text{Cortes de } \pi \text{ con los ejes.} \begin{cases} \text{eje X: } \begin{pmatrix} y=0 \\ z=0 \end{pmatrix} A(-8,0,0) \\ \text{eje Y: } \begin{pmatrix} x=0 \\ z=0 \end{pmatrix} B(0,8,0) \\ \text{eje Z: } \begin{pmatrix} x=0 \\ y=0 \end{pmatrix} C(0,0,8) \end{cases}$$

$$\text{Área ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \text{ x } \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|(64,-64,-64)| = 32\sqrt{3}u^2.$$

71. De los planos paralelos al plano x + y + z = 8, Halla los que determinan con los ejes de coordenadas un triángulo de área $8\sqrt{3}$.

VER VÍDEO https://youtu.be/Ef-Ix9jlpgo

Un plano paralelo al dado sería x + y + z – d = 0.

$$\text{Cortes del plano } \pi \text{ con los ejes:} \begin{cases} \text{eje X } (y=0, z=0) \rightarrow x = d \rightarrow (d,0,0) = A \\ \text{eje Y } (x=0, z=0) \rightarrow y = d \rightarrow (0,d,0) = B \\ \text{eje Z } (x=0, y=0) \rightarrow z = d \rightarrow (0,0,d) = C \end{cases}$$

Área del triángulo ABC $= \frac{1}{2}\left|\left|(-d,d,0).(-d,0,d)\right|\right| = \frac{1}{2}\left|\left|\begin{matrix} i & j & k \\ -d & d & 0 \\ -d & 0 & d \end{matrix}\right|\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}d^2u^2.$

Igualando este resultado al valor del área según el enunciado: $\frac{\sqrt{3}}{2}d^2 = 8\sqrt{3}\ d = \pm 4.$

Los planos buscados son : x + y + z + 4 = 0 y x + y + z - 4 = 0

10. VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO Y DEL TETRAEDRO OABC.

$$\mathbf{Volumen_{paralelepípedo}} = \left|\left|\begin{matrix}\overrightarrow{\mathbf{OA}} \\ \overrightarrow{\mathbf{OB}} \\ \overrightarrow{\mathbf{OC}}\end{matrix}\right|\right| . \ \mathbf{Volumen_{tetraedro}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\left|\left|\begin{matrix}\overrightarrow{\mathbf{OA}} \\ \overrightarrow{\mathbf{OB}} \\ \overrightarrow{\mathbf{OC}}\end{matrix}\right|\right|$$

72. Dados los puntos A(1, 0, 3) y B(1, 3, 4). Determina los puntos situados en el plano z = 1 que forman con los puntos A y B un triángulo equilátero. Calcula el volumen del tetraedro formado por los tres puntos anteriores y el origen de coordenadas.
VER VÍDEO https://youtu.be/ZHrgb7j2bZE

Punto $C(x,y,1)\begin{cases}|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| \to \sqrt{(x-1)^2+y^2+4} = \sqrt{10} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| \to \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+9} = \sqrt{10}\end{cases}$

$\to C\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{3}, \frac{7}{3}, 1\right)$

$V_{\text{tetraedro ABCO}} = \frac{1}{6}\left|\left|\begin{matrix}\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OC}\end{matrix}\right|\right| = \frac{1}{6}\left(\frac{25}{3} \pm 3\sqrt{5}\right)u^3.$

73. Calcula el volumen del tetraedro que forman los puntos de corte del plano π: x + 3y + 2z = 6 con los ejes de coordenadas y el origen.
VER VÍDEO https://youtu.be/xc2J9Wuj9XM

Cortes del plano π con los ejes: $\begin{cases}\text{eje X } (y=0, z=0) \to x = 6 \to (6,0,0) = A \\ \text{eje Y } (x=0, z=0) \to y = 2 \to (0,2,0) = B \\ \text{eje Z } (x=0, y=0) \to z = 3 \to (0,0,3) = C\end{cases}$

$\text{Volumen}_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6}\left|\left|\begin{matrix}\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OC}\end{matrix}\right|\right| = \frac{1}{6}\left|\left|\begin{matrix}6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\end{matrix}\right|\right| = 6u^3.$

74. Hallar a sabiendo que el plano π: x – 2y + az = 2 corta a los planos de coordenadas formando un tetraedro de 4 u^3
VER VÍDEO https://youtu.be/mbx-izXFwc0

Cortes del plano π con los ejes: $\begin{cases} \text{eje X } (y=0, z=0) \rightarrow x = 2 \rightarrow (2{,}0{,}0) = A \\ \text{eje Y } (x=0, z=0) \rightarrow y = -1 \rightarrow (0,-1{,}0) = B \\ \text{eje Z } (x=0, y=0) \rightarrow z = 3 \rightarrow \left(0{,}0,\frac{2}{a}\right) = C \end{cases}$

$$\text{Volumen}_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{OC}\end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{a}\end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left|\frac{-4}{a}\right| = 4\ u^3. \rightarrow a = \pm\frac{1}{6}$$

Dado los puntos A(1, 1, 1), B(0, 0, −2), C(2, −1, 0), D(−1, 2, −1) y E(0, 0, 0).
a. Comprobar que los puntos A, B y C determinan un único plano.
b. Estudiar si el triángulo de vértices A, B y C es rectángulo en el vértice A.
c. Halla el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos A y D con el plano del aparado a.
d. Calcular el volumen del tetraedro definido por los puntos A, B, C y D.

10. HAZ DE PLANOS DE UNA RECTA.

El Haz de planos de una recta es la ecuación de la familia de planos que contienen a la recta.

Dada la recta r: $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$ el haz de plano que contienen a r tiene la expresión: $Ax + By + Cz + D + t.(A'x + B'y + C'z + D') = 0$

Los ejercicios en que pregunta la ecuación de un plano que contiene una recta se pueden hacer fácilmente aplicando el haz de planos.

75. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r: $\begin{cases} \mathbf{x + y + z = 1} \\ \mathbf{x - y - 2z = 1} \end{cases}$ **y al punto P=(0,1,2)**

Haz de planos de r : $\begin{cases} x + y + z - 1 + t.(x - y - z - 1) = 0 \\ \qquad\qquad \text{operando} \\ (1+t)x + (1-t)y + (1-t)z - 1 - t = 0 \end{cases}$

Sustituyo P en la ecuación del haz y hallo t.

$$(1+t)0 + (1-t)1 + (1-t)2 - 1 - t = 0 \rightarrow t = \frac{1}{2} \overset{\substack{\text{sustituimos t} \\ \text{en el haz}}}{\rightarrow} \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow 3x + y + z - 3 = 0$

76. Hallar la ecuación de los planos que contienen a la recta r: $\begin{cases} \mathbf{x + y + z = 1} \\ \mathbf{x - y - 2z = 1} \end{cases}$ **y distan 3 unidades del origen.**

Haz de planos de r : $\begin{cases} x + y + z - 1 + t.(x - y - z - 1) = 0 \\ \qquad\qquad \text{operando} \\ (1+t)x + (1-t)y + (1-t)z - 1 - t = 0 \end{cases}$

Distancia del (0,0,0) al haz $= \left|\frac{-1-t}{\sqrt{(1+t)^2+(1-t)^2+(1-t)^2}}\right| = 3 \underset{\curvearrowright}{\overset{\text{elevando al cuadrado}}{\rightarrow}}$

$\frac{1+2t+t^2}{1+2t+t^2+1-2t+t^2+1-2t+t^2} = 9 \rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{194}}{13}$; sustituyendo t en la ecuación del haz tendremos los planos buscados.

77. Hallar la ecuación de los planos que contienen a la recta r:$\begin{cases} \mathbf{x+y+z=1} \\ \mathbf{x-y-2z=1} \end{cases}$ y forma un ángulo de 30º con el eje X.

Haz de planos de r : $\begin{cases} x + y + z - 1 + t.(x - y - z - 1) = 0 \\ \text{operando} \\ (1+t)x + (1-t)y + (1-t)z - 1 - t = 0 \end{cases} \rightarrow \vec{n}$

$= (1+t, 1-t, 1-t)$

Vector director eje X : $\vec{v} = (1,0,0)$

$\text{sen } 30 = \left|\frac{(1+t, 1-t, 1-t)(1,0,0)}{\sqrt{(1+t)^2+(1-t)^2+(1-t)^2}}\right|;\ \frac{1}{2} = \left|\frac{1+t}{\sqrt{(1+t)^2+(1-t)^2+(1-t)^2}}\right| = \frac{1}{2};$

$\frac{1+2t+t^2}{1+2t+t^2+1-2t+t^2+1-2t+t^2} = \frac{1}{4} \rightarrow t = -5 \pm 2\sqrt{6};$ sustituyendo t en la ecuación del haz tendremos los planos buscados.