SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

GEOMETRÍA ANALÍTICA.

VECTORES EN EL PLANO. PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO. PUNTOS ALINEADOS. DIVIDIR UN SEGMENTO EN PARTES IGUALES. ECUACIONES DE LA RECTA. PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD. POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS. DISTANCIAS. LAS CÓNICAS: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.

1. VECTORES EN EL PLANO.

1. Si $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (1, -2)$:

a. Escribe el vector (1, 5) como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
b. Halla un vector paralelo a $\vec{v}$ que sea unitario.
c. Halla un vector paralelo a $\vec{v}$ y que sea de módulo 5.
d. Halla el producto escalar $\vec{v} \circ \vec{u}$
e. Halla un vector perpendicular a $\vec{v}$ y que sea módulo 7.
f. Halla la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.
g. Halla el ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{u}$.
h. ¿Son $\vec{v}$ y $\vec{u}$ una base de R^2?, ¿Es ortonormal?

VER VIDEO https://youtu.be/JxfhWuwkxRo
VER VIDEO https://youtu.be/78_-D81FeHA

a.

$$(1,5) = x(2,3) + y(1,-2) \rightarrow \begin{cases} 1 = 2x + y \\ 5 = 3x - 2y \end{cases}$$

b. Para hallar un vector $\vec{u}$ paralelo a $\vec{v}$ y que sea unitario, basta dividir al vector $\vec{v}$ por su módulo.

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{5}{\sqrt{26}}\right)$$

c. Al vector $\vec{v}$ lo dividimos por su módulo, obteniendo un vector paralelo a $\vec{v}$ y unitario. Al vector encontrado lo multiplicamos por 5 y será paralelo a $\vec{v}$ y de módulo 5.

$$d.\ \vec{v}\circ\vec{u} = \begin{cases} |\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos\alpha \\ (v_x, v_y)(u_x, u_y) = v_x\cdot u_x + v_y u_y \end{cases} \rightarrow (2,3)\circ(1,-2) = 2-6 = -4$$

$$e.\ \perp\vec{v} = (2,1) \rightarrow \frac{(2,1)}{\sqrt{4+1}}\cdot 7 = \left(\frac{14}{\sqrt{5}}, \frac{7}{\sqrt{5}}\right)$$

$$f.\ \left|\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\vec{u}}\right| = \frac{\vec{v}\circ\vec{u}}{|\vec{v}|} = \frac{-4}{\sqrt{5}}$$

$$g.\ \cos\alpha = \frac{\vec{v}\circ\vec{u}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|} = \frac{-4}{\sqrt{5}\sqrt{13}} = \frac{-4}{\sqrt{65}} \rightarrow \alpha = 119{,}74°$$

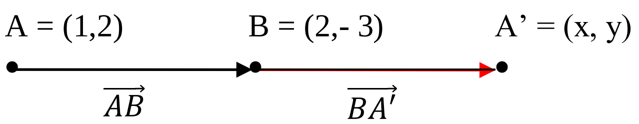
h. Dos vectores de R^2 son base si no son proporcionales. Si son base. Para que una base sea ortonormal los vectores deben ser perpendiculares y unitarios. No es el caso.

2. Dados los puntos A (3, 2), B = (2, 0) y C = (- 1, 3).
a. Hallar D para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean iguales.
b. Hallar D para que los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$ sean iguales.
c. Calcular $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$

2. PUNTO MEDIO Y SIMÉTRICO.

3. Hallar el punto medio de A = (1, 2) y B = (2, – 3) y el simétrico de A respecto de B.
VER VIDEO https://youtu.be/GYRsP6YqzUM

$$\text{Punto medio de } A, B = M_{A,B} = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{2-3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA'} \rightarrow (1,-5) = (x-2, y+3) \begin{cases} 1 = x-2 \rightarrow x = 3 \\ -5 = y+3 \rightarrow y = -8 \end{cases} \rightarrow A' = (3,-8)$$

3. PUNTOS ALINEADOS.

4. Estudiar si los puntos A = (1, 2), B = (2, - 1) y C = (0, 3) están alineados.
VER VIDEO https://youtu.be/8X8_g4uDDa4

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB} = (1, -3) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 1)\end{matrix}\right\} \overbrace{\frac{1}{-1} \neq \frac{-3}{1}}^{\text{Si la igualdad se cumple,están alineados.}} \rightarrow \text{NO alineados.}$$

5. Hallar k para que los puntos A(1, 3), B(2, 4) y C(k, 1) estén alineados.

$$\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{AB} = (1,1) \\ \overrightarrow{AC} = (k-1, -2)\end{matrix}\right. \rightarrow \frac{1}{k-1} = \frac{1}{-2} \rightarrow k - 1 = -2 \rightarrow k = -1$$

4. DIVIDIR UN SEGMENTO EN PARTES IGUALES.

6. Divide el segmento A = (1 , 3) B = (0, - 2) en tres partes iguales.
VER VIDEO https://youtu.be/z0valNscvKs

A = (1,3)   C = (x, y)   D = (x, y)   B = (0, - 2)

$$\overrightarrow{AB} = 3.\overrightarrow{AC} \rightarrow (-1, -5) = 3.(x-1, y-3) \left\{\begin{matrix}-1 = 3x - 3 \rightarrow x = \frac{2}{3} \\ -5 = 3y - 9 \rightarrow y = \frac{4}{3}\end{matrix}\right. \rightarrow C = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$\text{D es el punto medio de C y B} = \left(\frac{\frac{2}{3} + 0}{2}, \frac{\frac{4}{3} - 2}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

5. ECUACIONES DE LA RECTA.

a. Distintas formas de expresar una recta.

VER VIDEO https://youtu.be/hsw4KQit9dk

Vectorial. VER VÍDEO https://youtu.be/pH8W86NLS5c

$$(x, y) = (1, 2) + t.(-2, 3) \left\{\begin{matrix}\text{Punto: } (1,2) \\ \text{Otros puntos: doy valores a t. si } t = 1; P = (-1,5) \\ \text{vector director: } (-2,3) \\ \text{pendiente: } m = \frac{3}{-2} = \frac{2^{\text{a}}\text{componente del vector director}}{1^{\text{a}}\text{componente del vector director}}\end{matrix}\right.$$

Paramétricas. VER VÍDEO https://youtu.be/jf8lKIq1bCw

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Punto: } (2,3) \\ \text{Otros puntos: doy valores a t. si } t = 1;\ P = (-1,5) \\ \text{vector director: } (-3,2) \\ \text{pendiente: } m = \dfrac{2}{-3} = \dfrac{2^{\text{a}}\text{componente del vector director}}{1^{\text{a}}\text{componente del vector director}} \end{cases}$$

Continua. VER VÍDEO https://youtu.be/MNGO_fNr3OE

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{5} \rightarrow \begin{cases} \text{Punto: } (1,-2) \\ \text{Otros puntos: doy valores a x.} \\ \text{vector director: } (2,5) \\ \text{pendiente: } m = \dfrac{5}{2} = \dfrac{2^{\text{a}}\text{componente del vector director}}{1^{\text{a}}\text{componente del vector director}} \end{cases}$$

Implícita o general. Ax + By + C = 0

VER VÍDEO https://youtu.be/nyMm_vce-hI

$$2x + 7y - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{puntos: doy valores a x.} \\ \text{si } x = 1;\ y = \dfrac{1}{7} \\ \text{vector director: } (-B, A) = (-7,2) \\ \text{pendiente: } m = \dfrac{-2}{7} = \dfrac{2^{\text{a}}\text{componente del vector director}}{1^{\text{a}}\text{componente del vector director}} \end{cases}$$

Explícita. y = m.x + n VER VÍDEO https://youtu.be/E4IrOWzm9IU

$$y = 2.x - 3 \rightarrow \begin{cases} \text{puntos: doy valores a x.} \\ \text{si } x = 1;\ y = -1 \\ \text{pendiente: } m = 2 \\ \text{vector director: } (1, m) \rightarrow (1,2) \end{cases}$$

b. Pasar de una ecuación a otra.

VER VIDEO https://youtu.be/Zy0TCV_T_Rg

$$\textbf{Vectorial}: (x,y) = \overbrace{(1,-2)}^{\text{punto}} + t.\ \overbrace{(2,3)}^{\substack{\text{vector} \\ \text{director}}} \begin{cases} \textbf{Paramétricas}: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \end{cases} \\ \textbf{Continua}: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} \\ \quad \text{operando la continua:} \\ \quad 3x - 3 = 2y + 4 \\ \textbf{Implicita}: 3x - 2y - 7 = 0 \\ \quad \text{despejando la y:} \\ \textbf{Explícita}: y = \dfrac{3x-7}{2} \end{cases}$$

$$\textbf{Paramétricas}: \overbrace{\underbrace{\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 + 4t \end{cases}}_{\substack{\text{vector director} \\ (3,4)}}}^{\text{punto}:(2,-3)} \begin{cases} \textbf{Vectorial}: (x,y) = (2,-3) + t.(3,4) \\ \textbf{Continua}: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+3}{4} \\ \qquad \text{operando la continua:} \\ \qquad 4x - 8 = 3y + 9 \\ \textbf{Implicita}: 4x - 3y - 17 = 0 \\ \qquad \text{despejando la y:} \\ \textbf{Explícita}: y = \dfrac{4x-17}{3} \end{cases}$$

$$\textbf{Continua}: \overbrace{\underbrace{\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-1}}_{\substack{\text{vector director} \\ (1,-1)}}}^{\text{Punto } (3,2)} \begin{cases} \textbf{Vectorial}: (x,y) = (3,2) + t.(1,-1) \\ \textbf{Paramétricas}: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - t \end{cases} \\ \qquad \text{operando la continua:} \\ \qquad -x + 3 = y - 2 \\ \textbf{Implicita}: x + y - 5 = 0 \\ \qquad \text{despejando la y:} \\ \textbf{Explícita}: y = -x + 5 \end{cases}$$

$$\overbrace{\underbrace{\textbf{Implicita}: x + 2y - 5 = 0}_{\text{vector director}=(-B,A)=(-2,1)}}^{\text{punto}:x=1\to y=2;P=(1,2)} \begin{cases} \textbf{Vectorial}: (x,y) = (1,2) + t.(-2,1) \\ \textbf{Paramétricas}: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases} \\ \textbf{Continua}: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{1} \\ \qquad \text{despejando la y:} \\ \textbf{Explícita}: y = \dfrac{-x+5}{2} \end{cases}$$

$$\textbf{Explícita}: \overbrace{\underbrace{y = 2x - 5}_{\substack{\text{si } x=1\to y=-4 \\ P=(1,-4)}}}^{m=2\to\vec{v}=(1,2)} \begin{cases} \textbf{Vectorial}: (x,y) = (1,-4) + t.(1,2) \\ \textbf{Paramétricas}: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -4 + 2t \end{cases} \\ \textbf{Continua}: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+4}{-2} \\ \qquad \text{operando la continua:} \\ \qquad -2x + 2 = y + 4 \\ \textbf{Implícita}: 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

7. Hallar la ecuación de la recta en todas sus formas.

a. Recta que pasa por A = (1, – 2) y B = (0, 3)

b. Recta que pasa por A = (1, – 3) y es paralela a 2x + y – 1 = 0

c. Recta que pasa por A = (2, 4) y tiene pendiente – 2

VER VIDEO https://youtu.be/PPPagpv1xwE

a.

$$\begin{cases}\text{Pasa por } A=(1,-2)\\ \text{Tiene como vector } \overrightarrow{AB}=(-1,5)\end{cases}\left\{\begin{array}{l}\textbf{Vectorial}: (x,y)=(1,-2)+t.(-1,5)\\ \textbf{Paramétricas}: \begin{cases}x=1-t\\ y=-2+5t\end{cases}\\ \textbf{Continua}: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{5}\\ \qquad\text{operando la continua:}\\ \qquad 5x-5=-y-2\\ \textbf{Implícita}: 5x+y-3=0\\ \textbf{Explícita}: y=-5x+3\end{array}\right.$$

b. Dos rectas paralelas tiene el mismo vector director.

$$\overbrace{2x + y - 1 = 0}^{\substack{\text{vector director}=(-B,A)\\ (-1,2)}}$$

$$\begin{cases}\text{Pasa por } A=(1,-3)\\ \text{Tiene como vector } \vec{v}=(-1,2)\end{cases}\left\{\begin{array}{l}\textbf{Vectorial}: (x,y)=(1,-3)+t.(-1,2)\\ \textbf{Paramétricas}: \begin{cases}x=1-t\\ y=-3+2t\end{cases}\\ \textbf{Continua}: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{2}\\ \qquad\text{operando la continua:}\\ \qquad x-2=-y-3\\ \textbf{Implícita}: x+y+1=0\\ \textbf{Explícita}: y=-x-1\end{array}\right.$$

c.

$$\begin{cases}\text{Pasa por } A=(2,4)\\ \text{Tiene como vector } \vec{v}=(1,m)=(1,-2)\end{cases}\left\{\begin{array}{l}\textbf{Vectorial}: (x,y)=(2,4)+t.(1,-2)\\ \textbf{Paramétricas}: \begin{cases}x=2+t\\ y=4-2t\end{cases}\\ \textbf{Continua}: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{-2}\\ \qquad\text{operando la continua:}\\ \qquad -2x+4=y-4\\ \textbf{Implícita}: 2x+y-8=0\\ \textbf{Explícita}: y=-2x+8\end{array}\right.$$

c. Comprobar si un punto pertenece a una recta.

8. Comprobar que los siguientes puntos pertenecen a las rectas que se indican.

a. A(1, 2) a la recta (x, y) = (1, 3) + t. (1, -1).

b. B = (2, 3) a la recta $\begin{cases}\mathbf{x=1+t}\\ \mathbf{y=5-2t}\end{cases}$

VER VIDEO https://youtu.be/OcLG_KXHidQ

Si pasamos la recta a explícita, basta sustituir la x del punto y ver si me da la misma y.

A = (1, 2) a la recta (x, y) = (1, 3) + t. (1, -1)
(x, y) = (1, 3) + t. (1, –1) → y = – x + 4 ; sustituimos la x = 1 → y = 3 → A no pertenece a la recta.

B = (2, 3) a la recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases} \rightarrow y = -2x + 7$; sustituimos la $x = 2 \rightarrow y = 3 \rightarrow$
→ B sí pertenece a la recta.

d. Paralelismo y perpendicularidad.

9. Recta que pasa por A = (1, 4) y es perpendicular a x + 2y – 1 = 0
VER VIDEO https://youtu.be/x24LePsCERU

$$\begin{cases} \text{Pasa por } A = (1,4) \\ \perp \text{ a } \underbrace{x + 2y - 1 = 0}_{\substack{\text{vector director} \\ (-2,1)}} \end{cases} \rightarrow \text{Vector perpendicular a } \overbrace{(\mathbf{-2, 1}) = (\mathbf{1, 2})}^{\substack{\textbf{intercambiamos las} \\ \textbf{componentes y} \\ \textbf{cambiamos el signo} \\ \textbf{de una de ellas}}} \rightarrow \overbrace{\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2}}^{\text{continua.}}$$

10. Hallar el valor de k para que la recta r: 2x + ky + 1 = 0:
- **a. Pase por (1, 3).**
- **b. Sea paralela a s: (x, y) = (1, 2) + t·(- 1, 5).**
- **c. Sea perpendicular a t: y = 2x – 1.**
- **d. Tenga pendiente 3.**
- **e. Tenga ordenada en el origen 2.**

$v_r = (-k, 2);\ m_r = -\frac{2}{k}$

a. Sustituimos el punto en la recta. 2·1 + k·3 + 1 = 0 → k = - 1

$\text{b. } m_r = m_s \rightarrow -\frac{2}{k} = -5 \rightarrow k = \frac{2}{5}$

$\text{c. } m_r \cdot m_s = -1 \rightarrow -\frac{2}{k} \cdot 2 = -1 \rightarrow k = 4$

$\text{d. } m_r = 3 \rightarrow -\frac{2}{k} = 3 \rightarrow k = \frac{-3}{2}$

e. Ordenada en el origen 2 significa que pasa por el punto (0, 2).
2·0 + k·2 + 1 = 0 → k = - 1/2

11. Dada la recta x + ky – 1 = 0, hallar k:
- **a. Para que la recta pase por A = (2, - 1)**
- **b. Para que la recta tenga pendiente 3.**
- **c. Para que la recta sea paralela a (x, y) = (1, 3) + t.(2, 3)**
- **d. Para que la recta forme un ángulo de 45 grados con el eje positivo de las X.**

VER VIDEO https://youtu.be/EBigdSbheBc

a.
Sustituimos x por 2 e y por – 1 y hallamos k → 2 – k – 1 = 0 → k = 1

b.
$x + ky - 1 = 0 \rightarrow \text{vector director} = (-k, 1) \rightarrow m = \frac{1}{-k} = 3 \rightarrow k = \frac{-1}{3}$

c.
$\begin{cases} x + ky - 1 = 0 \rightarrow \vec{v} = (-k, 1) \\ (x, y) = (1, 3) + t.(2, 3) \rightarrow \vec{v} = (2,3) \rightarrow m = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{-k} = \frac{3}{2} \rightarrow k = \frac{-2}{3}$

d.
$x + ky - 1 = 0 \rightarrow \text{vector director} = (-k, 1) \rightarrow m = \frac{1}{-k}$
La pendiente es la tangente del ángulo que la recta forma con el eje positivo de las X $\rightarrow m = \text{tag}\,\alpha \rightarrow \frac{1}{-k} = \text{tag}\,45 = 1 \rightarrow k = -1$

6. POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS.

	Explicita $\begin{cases} y = m.x + n \\ y = m'.x + n' \end{cases}$	Implícita $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$
Se cortan	$m \neq m'$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$
Paralelas	m = m' y distinta ecuación	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
Coincidentes	Tiene la misma ecuación	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$

12. Estudiar la posición relativa de los siguientes pares de rectas.

a. x + y – 2 = 0; 2x + 2y – 5 = 0

b. y = 2x – 3; y = 3x + 1

c. (x,y) = (1, – 1) + t·((1,3); y = 3x + 1

d. (x,y) = (2, – 3) + t·(– 1,2); x = 1 – α, y = – 1 + 2α

VER VIDEO https://youtu.be/4LD95gSjxzc

a. $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-5} \rightarrow \text{paralelas}$

b. $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 3x + 1 \end{cases} \rightarrow 2 \neq 3 \rightarrow m \neq m' \rightarrow$
se cortan. Si resuelvo el sistema tendré el punto de corte → 2x – 3 = 3x + 1 → x = -4; y = - 11 → P = (- 1, - 11)

c. $\begin{cases} (x, y) = (1, -1) + t.(1,3) \rightarrow y = 3x - 4 \\ y = 3x + 1 \end{cases} \rightarrow m = m' \text{ y distinta ecuación}$
$\rightarrow$ paralelas.

$$\text{d.}\begin{cases}(x,y)=(2,-3)+t.(-1,2)\to y=-2x+1\\ \begin{cases}x=1-\alpha\\ y=-1+2\alpha\end{cases}\to y=-2x+1\end{cases}\to \text{misma ecuación explícita}$$
$$\to \text{coincidentes.}$$

7. ÁNGULO QUE FORMAN DOS RECTAS.

$$\cos\alpha=\left|\frac{\vec{v_r}.\vec{v_s}}{|\vec{v_r}|.|\vec{v_s}|}\right| \qquad \tan\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1.m_2}\right|$$

13. Hallar el ángulo que forman las siguientes rectas:
VER VIDEO https://youtu.be/8wJvMLruqfg

$$\text{a}\begin{cases}r:(x,y)=(1,-2)+t.(2,3)\\ \quad v_r=(2,3)\\ s:x-2y+1=0\\ \quad v_s=(2,1)\end{cases}\to\begin{cases}\cos\alpha=\left|\frac{\vec{v_r}.\vec{v_s}}{|\vec{v_r}|.|\vec{v_s}|}\right|=\left|\frac{(2,3).(2,1)}{\sqrt{13}\sqrt{5}}\right|=\frac{7}{\sqrt{65}}\\ \to\alpha=29'74^{\circ}\\ \tan\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1.m_2}\right|=\left|\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}.\frac{1}{2}}\right|=\frac{4}{7}\\ \to\alpha=29'74^{\circ}\end{cases}$$

$$\text{b}\begin{cases}r:\begin{cases}x=3-2t\\ y=2-t\end{cases}\to v_r=(-2,-1)\\ s:\frac{x-2}{3}=y-1\to v_s=(3,1)\end{cases}\to\begin{cases}\cos\alpha=\left|\frac{\vec{v_r}.\vec{v_s}}{|\vec{v_r}|.|\vec{v_s}|}\right|=\left|\frac{(-2,-1).(3,1)}{\sqrt{5}\sqrt{10}}\right|=\frac{7}{\sqrt{50}}\\ \to\alpha=8'13^{\circ}\\ \tan\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1.m_2}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}.\frac{1}{3}}\right|=\frac{1}{7}\\ \to\alpha=8'13^{\circ}\end{cases}$$

14. Hallar k para que la recta x + ky + 2 = 0 forme un ángulo de 35º con la recta x + y + 1 = 0.
VER VIDEO https://youtu.be/pBMPlv500Zw

$$\begin{cases}r:x+ky+2=0\to v_r=(-k,1)\\ s:x+y+1=0\to v_r=(-1,1)\end{cases}\to\cos\alpha=\left|\frac{\vec{v_r}.\vec{v_s}}{|\vec{v_r}|.|\vec{v_s}|}\right|=\left|\frac{(-k,1).(-1,1)}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{2}}\right|=\cos 35$$
$$\left|\frac{k+1}{\sqrt{2k^2+2}}\right|=\overbrace{\cos 35}^{0'82}\to\frac{k^2+2k+1}{2k^2+2}=0'67\to\begin{cases}k=5'71\\ k=0'18\end{cases}$$

15. Hallar la ecuación de la recta que pasa por (1, - 1) y forma un ángulo de 45º con la recta y = 2.x + 2.
VER VIDEO https://youtu.be/yx6PLs129bI

y = 2x + 2 ⟶ m_1 = 2, Hallaremos m_2 con la fórmula:

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 . m_2}\right| \rightarrow \overbrace{\tan 45}^{1} = \left|\frac{2 - m_2}{1 + 2 . m_2}\right| ; |1 + 2m_2|$$
$$= |2 - m_2| ; \begin{cases} 1 + 2m_2 = 2 - m_2 \\ m_2 = \dfrac{1}{3} \\ 1 + 2m_2 = -2 + m_2 \\ m_2 = -3 \end{cases}$$

Recta que pasa por (1, - 1) y tiene pendiente 1/3 ⟶ v_r = (1, 1/3); $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + \frac{1}{3}t \end{cases}$

Recta que pasa por (1, - 1) y tiene pendiente - 3 ⟶ v_r = (1, - 3); $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 3t \end{cases}$

8. DISTANCIAS.

Distancia punto – punto. d(A - B) = $|\overrightarrow{AB}|$

Distancia punto $P = (a, b)$ a la recta r: $Ax + By + C = 0 \rightarrow d(P, r)$

$$= \left|\frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

Distancia recta - recta. Si se cortan o son coincidentes, la distancia es cero. Si son paralelas hacemos distancia punto recta.

16. Dados los puntos A = (1, 3) y B = (2, - 4) y la recta r: 2x – 3y + 4 = 0
- **a. Hallar distancia de A a B.**
- **b. Halla distancia de A a r.**
- **c. Hallar distancia de r a s: (x, y) = (1, 0) + t·(6, 4)**

VER VÍDEO https://youtu.be/i8tj-m1XfNU

17. Hallar k para que la recta x + ky + 2 = 0 diste 3 unidades del origen.

VER VIDEO https://youtu.be/SHjYCb74Odk

Distancia de $[O = (0, 0) \text{a r}: x + ky + 2 = 0] = 3 \rightarrow \left|\frac{1.0 + k.0 + 2}{\sqrt{1^2 + k^2}}\right| = 3 \rightarrow \frac{4}{1 + k^2}$
$= 9 \rightarrow \nexists k$

La recta dada no puede distar 3 unidades del origen.

18. Hallar k sabiendo que el triángulo de vértices A, B y C es isósceles. A = (1, 2), B = (2, - 3) y C = (k, 0) siendo BC el lado desigual.

VER VIDEO https://youtu.be/Q5IIKIaJZu4

Distancia de A a C igual distancia de A a B.

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| \rightarrow |(k - 1, -2)||(1, -5)| \rightarrow \sqrt{(k - 1)^2 + 4} = \sqrt{26} \rightarrow k^2 - 2k - 21 = 0$

$k = \begin{cases} 1 + \sqrt{22} \\ 1 - \sqrt{22} \end{cases}$

19. Hallar un punto C de la recta r: x + 2y – 3 = 0 que diste 2 unidades del punto P = (1, 2)
VER VÍDEO https://youtu.be/CfJ_Q8d1qOQ

$$C=(x,y)\begin{cases}x+2y-3=0\\ |\overrightarrow{PC}|=2\rightarrow|(x-1,y-2)|=2\rightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=2\end{cases}$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases}x+2y-3=0\\ \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}C=(-1,2)\\ C=\left(\frac{11}{5},\frac{2}{5}\right)\end{cases}$

Hallar el punto de r: x + y + 1 = 0 que equidista de las rectas 2x + y + 1 = 0 y x +2y +1 = 0
VER VÍDEO https://youtu.be/PMrADqnZOxY

9. ESTUDIO DE LOS ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO.

20. Dado el triángulo de vértices A = (- 1, 2), B = (3, - 2) y C = (1, 4).

a. Perímetro.

b. Clasifica el triángulo según los lados y según los ángulos.

VER VÍDEO https://youtu.be/pm7jhGCyYTc

c. Ecuación de la altura que pasa por A.

d. Ortocentro.

VER VÍDEO https://youtu.be/hXoYHDx6O08

e. Ecuación de la mediana que pasa por B.

f. Baricentro.

VER VÍDEO https://youtu.be/bW78-zmYTM0

g. Ecuación de la mediatriz del lado BC.

h. Circuncentro.

VER VÍDEO https://youtu.be/vNm8hdRKw4E

i. Área del triángulo.

VER VÍDEO https://youtu.be/9DLtweYYOV4

a.

Longitud de los lados: $\begin{cases}AB\rightarrow|\overrightarrow{AB}|=|(4,-4)|=\sqrt{32}\\ AC\rightarrow|\overrightarrow{AC}|=|(2,2)|=\sqrt{8}\\ BC\rightarrow|\overrightarrow{BC}|=|(-2,6)|=\sqrt{40}\end{cases}\rightarrow \text{perimetro}=2\sqrt{10}+6\sqrt{2}$

b.

Los lados son distintos, el triángulo es escaleno.

Se cumple $\left(\sqrt{40}\right)^2=\left(\sqrt{32}\right)^2+\left(\sqrt{8}\right)^2\rightarrow 40=32+8\rightarrow$ El triángulo es rectángulo

Si hubiera dado > sería obtusángulo y si hubiera dado < sería acutángulo.

c.

Una altura pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto.

$$\begin{cases}\text{Pasa por } A=(-1,2)\\ \overrightarrow{BC}=(-2,6)\rightarrow\perp\overrightarrow{BC}=(6,2)\end{cases}\rightarrow\frac{x+1}{6}=\frac{y-2}{2}\rightarrow x-3y+7=0$$

d.

El ortocentro es el punto donde se cortan las alturas. Buscamos otra altura y resolvemos el sistema formado por las dos alturas.

$$\begin{cases}\text{Pasa por } B=(3,-2)\\ \overrightarrow{AC}=(2,2)\to\perp\overrightarrow{AC}=(-2,2)\end{cases}\to\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{2}\to x+y-1=0$$

$$\text{Ortocentro}\begin{cases}x-3y+7=0\\ x+y-1=0\end{cases}\to(-1,2)$$

e.

Una mediana es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

$$\begin{cases}\text{Pasa por } B=(3,-2)\\ \text{Pasa por } M_{AC}=(0,3)\to\overrightarrow{BM}=(-3,5)\end{cases}\to\frac{x-3}{-3}=\frac{y+2}{5}\to 5x+3y-9=0$$

f.

El baricentro es el punto donde se cortan las medianas. Buscamos otra mediana y resolvemos el sistema formado por las dos medianas.

$$\begin{cases}\text{Pasa por } A=(-1,2)\\ \text{Pasa por } M_{BC}=(2,1)\to\overrightarrow{BM}=(3,-1)\end{cases}\to\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}\to x+3y-5=0$$

$$\text{Bariocentro}\begin{cases}5x+3y-9=0\\ x+3y-5=0\end{cases}\to\left(1,\frac{4}{3}\right)$$

Otra forma de hallar el baricentro $\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$

g.

Una mediatriz es la perpendicular al lado en su punto medio.

$$\begin{cases}\text{Pasa por } M_{BC}=(2,1)\\ \text{Es }\perp\text{ a BC: }\overrightarrow{BC}=(-2,6)\perp\overrightarrow{BC}=(6,2)\end{cases}\to\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{6}\to 3x+y-5=0$$

h.

El circuncentro es el punto donde se cortan las mediatrices. Buscamos otra mediatriz y resolvemos el sistema formado por las dos mediatrices.

$$\begin{cases}\text{Pasa por } M_{AC}=(0,3)\\ \text{Es perpendicular a AC: }\overrightarrow{AC}=(2,2)\perp\overrightarrow{AC}=(-2,2)\end{cases}\to\frac{x}{-2}=\frac{y-3}{2}\to x+y-3=0$$

$$\text{Circuncentro}\begin{cases}3x+y-5=0\\ x+y-3=0\end{cases}\to(1,2)$$

i.

$$\text{Base }=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

$$\text{Altura.}\begin{cases}\text{Recta BC}\begin{cases}\text{Pasa por } B=(3,-2)\\ \overrightarrow{BC}=(-2,6)\end{cases}\to\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{6}\to 3x+y-7=0\\ \text{Distancia de A a BC }=\left|\frac{3.(-1)+1.(2)-7}{\sqrt{3^2+1}}\right|=\frac{8}{\sqrt{10}}\end{cases}$$

$$\text{Área} = \frac{\text{base x altura}}{2} = \frac{\text{dist. de B a C x dist. de A a la recta BC}}{2} = \frac{2.\sqrt{10}.\frac{8}{\sqrt{10}}}{2} = 8\ \text{u}^2$$

21. Dado el triángulo cuyo lados se encuentra sobre las rectas r: 2x + y – 3 = 0; s:3x – y – 7 = 0 ; t:x – 2y + 1 = 0 Hallar sus vértices.
VER VIDEO https://youtu.be/GtajUaMCGzs

22. Si A = (1, 3) , B = (2 , - 1) y C = (- 2, 3) son los vértices de un paralelogramo, halla el cuarto vértice y el área del paralelogramo.
VER VIDEO https://youtu.be/zNJYPIbVILo

23. Estas tres rectas se cortan formando un triángulo.
$\mathbf{r: x - y - 1 = 0}$
$\mathbf{s: x + y + 2 = 0}$
$\mathbf{t: 8x + 3y - 19 = 0}$

a. **Representar r.**
b. **Halla las coordenadas de los vértices del triángulo.**
c. **Calcula el perímetro del triángulo.**
d. **Calcula la altura por A (corte r y s).**
e. **Calcula la mediatriz del lado que está sobre t.**

VER VÍDEO https://youtu.be/VIYcVvRBHMU

EJERCICIOS VARIOS.

24.- Dados los puntos A(4,-2) y B(7,3), calcula:

a. **Las coordenadas del punto C que sea simétrico de a respecto de B.**
b. **La ecuación de la recta perpendicular a AB en su punto medio.**
c. **La ecuación de la recta paralela a AB que pasa por el origen de coordenadas.**

VER VÍDEO https://youtu.be/Iif1PTKXPqQ

25. Hallar un punto C de la recta r: x + 2y – 3 = 0 alineado con A = (1,3) y B = (– 1,4)
VER VÍDEO https://youtu.be/ClzOUncDH_0

26. Hallar el punto simétrico de P (1, 2) respecto de la recta (x, y) = (1, 3) + t·(2, – 1)
VER VÍDEO https://youtu.be/8vSYvliShfE

27. Calcula el punto simétrico del punto P(2, 1) respecto de la recta que pasa por los puntos A(0, 3) y B(2, 5).
VER VÍDEO https://youtu.be/r7PAMH5Cwe4

M=(0. 3) y P’=(-2,5)

28. Calcula los valores del parámetro k para que la recta (x, y) = (2, - 1) + t·(- 4, - 3) este a distancia 2 del punto P(2k – 1, 5).
VER VÍDEO https://youtu.be/ncYLnMz1eO8

$k = \frac{43}{6}$ y $k = \frac{23}{6}$

29. Calcula los puntos que equidistan de las rectas r y s. r: 3x – y = 6 y s: (x, y) = (1, 4) + t·(3, 1).
VER VÍDEO https://youtu.be/VgU6cNOupXU

Son todos los puntos de las rectas: $2x + 2y - 17 = 0$ y $4x - 4y + 5 = 0$

30. Dados los puntos A(3, - 1), B(2, 0) y C(1, 3), que son 3 puntos consecutivos de un paralelogramo, hallar el cuarto punto así como el área del paralelogramo.
VER VÍDEO https://youtu.be/Y5SEivWiUVo

D(2, 2) y área = 1 u^2.

31. Dado el triángulo cuyo lados se encuentra sobre las rectas r: 2x + y – 3 = 0; s:3x – y – 7 = 0 ; t:x – 2y + 1 = 0 Hallar sus vértices.
VER VIDEO https://youtu.be/GtajUaMCGzs

32. Si A = (1, 3) , B = (2 , - 1) y C = (- 2, 3) son los vértices de un paralelogramo, halla el cuarto vértice y el área del paralelogramo.
VER VIDEO https://youtu.be/zNJYPIbVILo

33. Hallar un punto A de la recta y = x cuya distancia a B = (1, 2) se el doble que a C = (- 1, - 3)
VER VIDEO https://youtu.be/Yj6Zz6P7Hkg

$A = (x, y) = (x, x)$
$|\overrightarrow{AB}| = 2 \cdot |\overrightarrow{AC}| \rightarrow |(1 - x, 2 - x)| = 2 \cdot |(-1 - x, -3 - x)| \rightarrow$
$\rightarrow \sqrt{(1 - x)^2 + (2 - x)^2} = 2 \cdot \sqrt{(-1 - x)^2 + (-3 - x)^2} \ldots$

34. Un triángulo isósceles tiene por lados iguales AB y AC. Se sabe que el vértice A es un punto de la recta x + y = 6 y que las coordenadas de los otros dos vértices son A(1,-1) y B(5, 1). Halla las coordenadas del punto A y el área del triángulo.
VER VIDEO https://youtu.be/GEuZmeLYvLI

35. Calcula el punto simétrico de P = (3, 3) respecto de la recta r : x + y = 3
VER VIDEO https://youtu.be/W0PdAJZ5JWc

36. Halla el P punto de la recta r: y = 2x – 1 que forma con A = (1, 2) y B = (2, - 1) un triángulo rectángulo con el ángulo recto en A.
VER VIDEO https://youtu.be/8PVe-6eMoMg

37. Hallar los puntos de corte con los ejes de la recta $x - y + 1 = 0$. Calcula el área del triángulo que forma la recta con los ejes.
VER VIDEO https://youtu.be/8PXQ8oBx00E

38. Hallar k sabiendo que la recta $x + ky + 2 = 0$ forma con los ejes un triángulo de 1 u^2.
VER VIDEO https://youtu.be/BrexKdrAR4U

39. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 1) y forma con los ejes un triángulo de 4 u^2.
VER VIDEO https://youtu.be/Xa90aFShqIg

CÓNICAS.

La circunferencia.

VER VÍDEO https://youtu.be/s3JrQiBK4n0

La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos P del plano que equidistan de un punto C llamado centro. La distancia de P a C es el radio.

Ecuación de la circunferencia de centro (a , b) y radio R.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \text{ ; operando se obtiene}$$
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + Mx + Ny + P = 0$$

40. De las siguientes ecuaciones cual es una circunferencia.
a. $2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y - 6 = 0$
b. $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 4 = 0$
VER VÍDEO https://youtu.be/p4DP5WtlRPk

a.

$$2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y - 6 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \begin{cases} -2a = -4 \rightarrow a = 2 \\ -2b = -6 \rightarrow b = 3 \\ a^2 + b^2 - R^2 = -3 \rightarrow R = 4 \end{cases}$$

Es una circunferencia de radio 4 y centro (2, 3)

b.

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 3 = 0 \begin{cases} -2a = -2 \rightarrow a = 1 \\ -2b = 2 \rightarrow b = -1 \\ a^2 + b^2 - R^2 = 4 \rightarrow -R^2 = 2 \nexists \text{ sol.} \end{cases} \text{; No es circunferencia.}$$

41. Escribe la ecuación de la circunferencia de centro C (1 , – 2) y que pasa por A (3, – 1).
VER VÍDEO https://youtu.be/jfhHOQl8Brc

$$\begin{cases} \text{Centro } (1, -2) \\ \text{Radio} = |\overrightarrow{AC}| = |(-2, -1)| = \sqrt{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

42. Escribe la ecuación de la circunferencia de centro C (2 , – 3) y que es tangente a la recta r: $2x + y + 1 = 0$

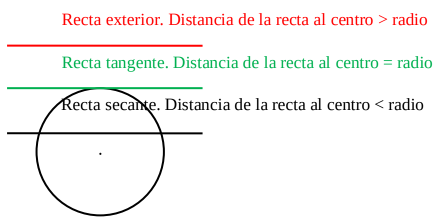
VER VÍDEO https://youtu.be/ZUKCluelrWE

$$\begin{cases}\text{Centro } (2,-3) \\ \text{Radio} = d\,(C\ a\ r) = \dfrac{|2.2-3+1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}(x-2)^2+(y+3)^2=\dfrac{4}{5} \\ x^2+y^2-4x+6y+\dfrac{61}{5}=0\end{cases}$$

43. Escribe la ecuación de la circunferencia que tiene como extremos de un diámetro los puntos A (1, – 4) y B (– 1, 2).
VER VÍDEO https://youtu.be/HEEP62D-kvQ

$$\begin{cases}\text{Centro } M_{AB} = (0,-1) \\ \text{Radio} = |\overrightarrow{AM_{AB}}| = |(-1,3)| = \sqrt{10}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x^2+(y+1)^2=10 \\ x^2+y^2-2y-9=0\end{cases}$$

Posición de una recta respecto a una circunferencia.



44. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ y las rectas r: x + y + 6 = 0, s: y = – x estudia su posición relativa.
VER VÍDEO https://youtu.be/vuo9uIDtUFY
VER VÍDEO https://youtu.be/BLSNJVs1gjE

$$x^2+y^2-4x+2y-4=0 \begin{cases}-2a=-4\rightarrow a=2 \\ -2b=2\rightarrow b=-1 \\ a^2+b^2-R^2=-4\rightarrow R=3\end{cases} \begin{cases}\text{Centro } C\,(2,-1) \\ \text{Radio} = 3\end{cases}$$

$$\text{distancia } (r\,,C) = \frac{|2-1+6|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} > R = 3 \rightarrow \text{la recta r es exterior.}$$

$$\text{distancia } (s\,,C) = \frac{|2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < R = 3 \rightarrow \text{la recta s es secante.}$$

45. Hallar la posición relativa de la recta mx + y = 0 y la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ en función del parámetro m.
VER VÍDEO https://youtu.be/bxeJnuH8ydY

Resolvemos el sistema $\begin{cases}mx+y=0 \\ x^2+y^2-4x+2y+4=0\end{cases}$;

$$x^2+(-mx)^2-4x+2(-mx)+4=0$$

$$x^2+m^2x^2-4x-2mx+4=0 \rightarrow \overbrace{(1+m^2)}^{a}x^2+\overbrace{(-4-2m)}^{b}x+\overbrace{+4}^{c}=0$$

$$\underbrace{\text{Discriminante}}_{b^2-4ac} = 0 \rightarrow (4+2m)^2 - 4.(1+m^2).4 = 0 \rightarrow -12m^2 + 16 = 0; \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Valor de m	– 1	0	1	$\frac{4}{3}$	2
Signo de $b^2 - 4ac$	–	0	+	0	–

$$\begin{cases} \text{si } m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right); \Delta(b^2-4ac) < 0; \text{el sistema no tiene solución; recta exterior.} \\ \text{si } m \in \left(0, \frac{4}{3}\right); \Delta(b^2-4ac) > 0; \text{el sistema tiene 2 soluciones; recta secante.} \\ \text{si } m = 0 \text{ o } m = \frac{4}{3}; \ \Delta(b^2-4ac) = 0; \text{el sistema tiene 1 solución; recta tangente.} \end{cases}$$

Potencia de un punto respecto a una circunferencia: sustituimos el punto en la circunferencia y operamos.

Según el signo de la potencia $\begin{cases} < 0 \rightarrow \text{punto interior} \\ = 0 \rightarrow \text{el punto está sobre la circunferencia} \\ > 0 \rightarrow \text{punto exterior.} \end{cases}$

Ejemplo, Potencia de A(1, – 2) respecto de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$

$1^2 + (-2)^2 + 4.1 - 2.(-2) - 4 = 9 \longrightarrow$ punto exterior.

46. Hallar la posición del punto A = (m, 1) respecto de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ en función del parámetro m.

VER VÍDEO https://youtu.be/saBhXAUtuCg

Calculamos la potencia de A respecto de la circunferencia.

Potencia (A) = $m^2 + 1 - 2m - 2 - 7 = 0$; $m^2 - 2m - 8 = 0$ $\begin{cases} m = 4 \\ m = -2 \end{cases}$

Valor de m	– 3	– 2	0	4	5
Signo de $b^2 - 4ac$	+	0	–	0	+

$$\begin{cases} \text{Si } m \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty) \text{ la potencia} > 0; \text{punto exterior.} \\ \text{Si } m \in (-2, 4) \text{ la potencia} < 0; \text{punto interior.} \\ \text{Si } m = -2 \text{ o } m = 4 \text{ la potencia} = 0; \text{punto sobre la circunferencia.} \end{cases}$$

47. Indica la posición relativa entre las circunferencias:
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$
$X^2 + y^2 - 4x - 6y = -4$

VER VÍDEO https://youtu.be/5fhf4Iw1ZJE

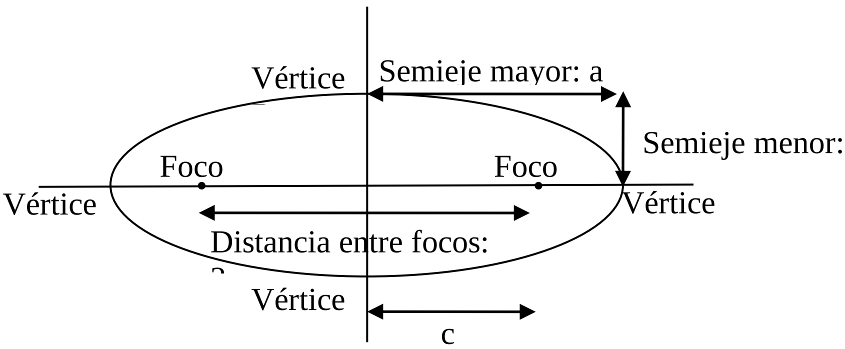
La elipse.

La **elipse** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Esa constante es 2a (eje mayor).

Ecuación de la elipse.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\begin{cases}\text{Centro }(x_0,y_0)\\ \text{Semieje mayor: a}\\ \text{Semieje menor: b}\\ \text{Distancia focal: c}\\ \text{Excentricidad: }\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

$$a^2=b^2+c^2$$

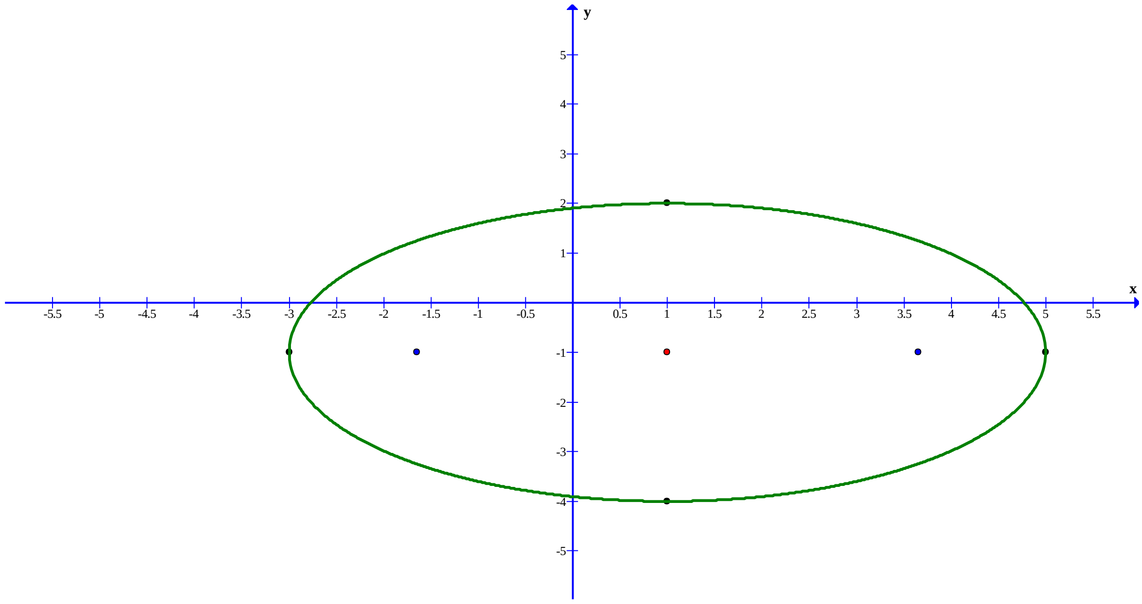


48. Hallar los elementos de la elipse $\mathbf{\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y+1)^2}{9}=1}$

VER VÍDEO https://youtu.be/DfyDPgRAKYk

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

$$\begin{cases}\text{Centro }(1,-1)\\ \text{Semieje mayor (horizontal): } a=4\begin{cases}\text{Vértice A}=(5,-1)\\ \text{Vértice A}'=(-3,-1)\end{cases}\\ \text{Semieje menor (vertical): } b=3\begin{cases}\text{Vértice B}=(1,2)\\ \text{Vértice B}'=(1,-4)\end{cases}\\ \text{Distancia focal: } c=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}\begin{cases}\text{Foco F}=\left(1-\sqrt{7},-1\right)\\ \text{Foco F}'=\left(1+\sqrt{7},-1\right)\end{cases}\\ \text{Excentricidad}=\dfrac{4}{\sqrt{7}}=\dfrac{4.\sqrt{7}}{7}\end{cases}$$



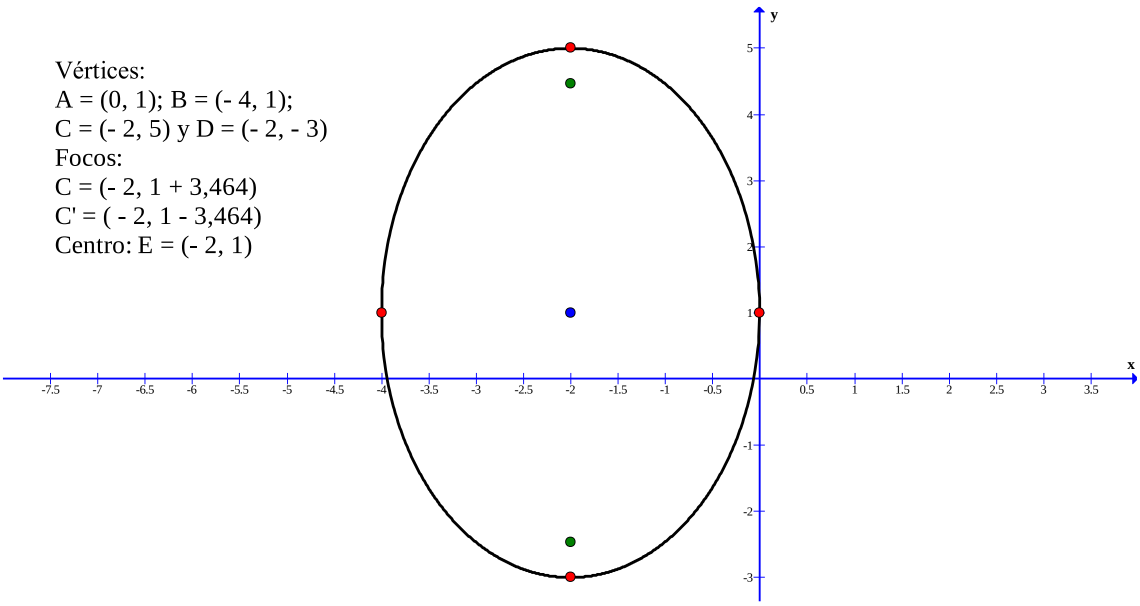
49. Hallar los elementos de la elipse y represéntala.

$$\frac{(\mathbf{x}+\mathbf{2})^2}{\mathbf{4}}+\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{1})^2}{\mathbf{16}}=\mathbf{1}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/BGA5lGXTG-s

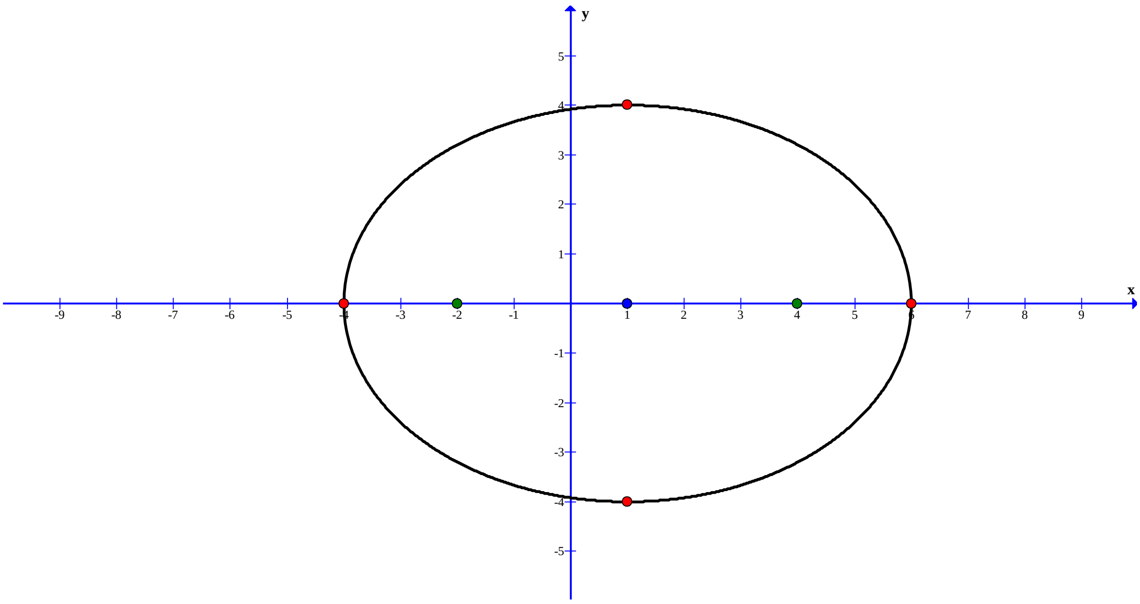
$$\begin{cases} \text{Centro } (-2,1) \\ \text{Semieje menor (horizontal)}: a = 2 \begin{cases} \text{Vértice A} = (0,1) \\ \text{Vértice A}' = (-4,1) \end{cases} \\ \text{Semieje mayor (vertical)}: b = 4 \begin{cases} \text{Vértice B} = (-2,5) \\ \text{Vértice B}' = (-2,-3) \end{cases} \\ \text{Distancia focal}: c = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} \begin{cases} \text{Foco F} = \left(-2,1+\sqrt{12}\right) \\ \text{Foco F}' = \left(-2,1-\sqrt{12}\right) \end{cases} \\ \text{Excentricidad} = \dfrac{2}{\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{12}}{6} \end{cases}$$

Vértices:
A = (0, 1); B = (- 4, 1);
C = (- 2, 5) y D = (- 2, - 3)
Focos:
C = (- 2, 1 + 3,464)
C' = (- 2, 1 - 3,464)
Centro: E = (- 2, 1)



50. Hallar los elementos de la elipse qué tiene por vértices los puntos A = (6, 0) y B = (1, 4). Represéntala.
VER VÍDEO https://youtu.be/6nGcLajEb_4

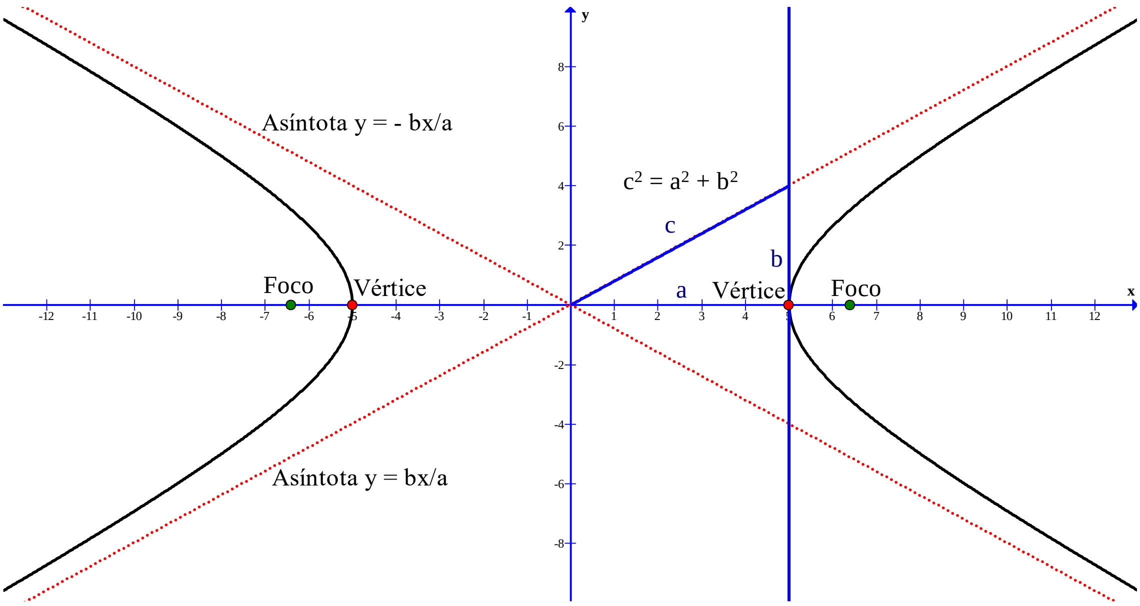
$$\begin{cases}\text{Foco } (6,0)\\ \text{Foco } (1,4)\end{cases} \rightarrow \text{Centro } (1,0) \rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \\ a^2 = b^2 + c^2; c = 3\end{cases} \rightarrow \frac{(x-1)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$



La hipérbola.

Una **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es igual a la distancia entre los vértices, la cual es una constante positiva.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \begin{cases} \text{Centro} = (0,0) \\ c^2 = a^2+b^2 \\ \text{Vértices:} \begin{cases} (a,0) \\ (-a,0) \end{cases} \\ \text{Focos:} \begin{cases} (c,0) \\ (-c,0) \end{cases} \\ \text{Asíntotas:} \begin{cases} y = \dfrac{b}{a}\cdot x \\ y = \dfrac{-b}{a}\cdot x \end{cases} \end{cases}$$

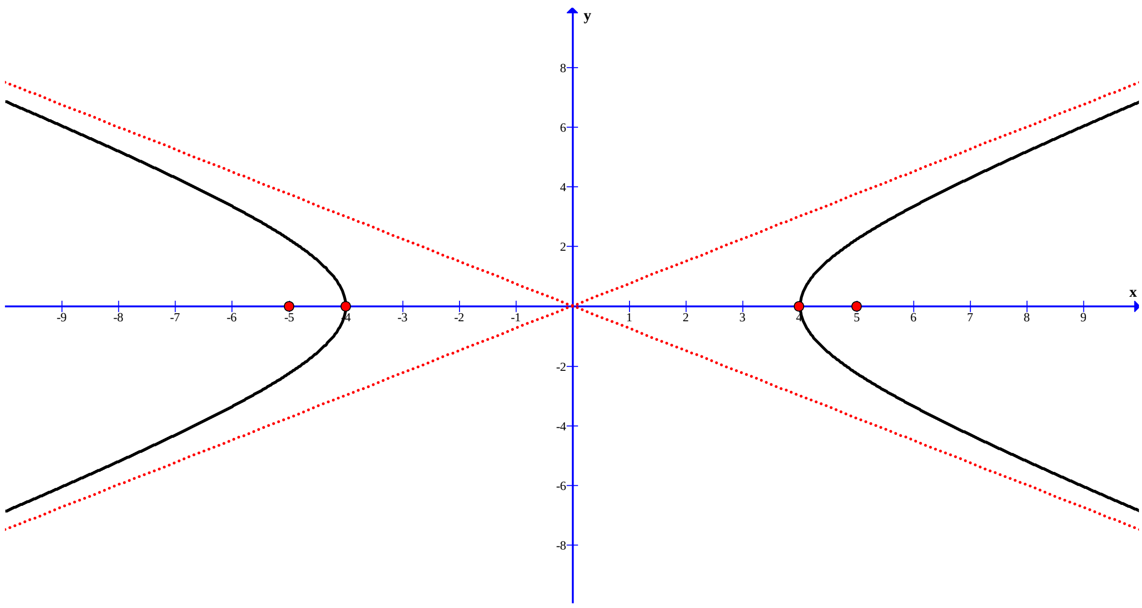


51. Hallar los elementos de la hipérbola y represéntala.

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

VER VÍDEO VER VÍDEO https://youtu.be/sdw1yQz1N7U

$$\begin{cases} \text{Centro} = (0,0) \\ a^2 = 16; a = 4 \\ b^2 = 9; b = 3 \\ c^2 = a^2 + b^2; c = 5 \\ \text{Vértices:} \begin{cases} (4,0) \\ (-4,0) \end{cases} \\ \text{Focos:} \begin{cases} (5,0) \\ (-5,0) \end{cases} \\ \text{Asíntotas:} \begin{cases} y = \frac{3}{4} \cdot x \\ y = \frac{-3}{4} \cdot x \end{cases} \end{cases}$$



52. Escribe la ecuación de la hipérbola que:

a. Tiene un foco (4, 0), vértice en (2, 0) y centro (0, 0)

b. Tiene asíntota y = 3x/4 y foco (– 10, 0)

VER VÍDEO https://youtu.be/TyC29jmB3iY

$$\begin{cases} \text{Foco } (4,0) \\ \text{Centro } (0,0) \end{cases} \to c = 4$$

$$\begin{cases} \text{Vértice } (2,0) \\ \text{Centro } (0,0) \end{cases} \to a = 2 \to c^2 = a^2 + b^2 \to b = \sqrt{12} \to \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

$$\begin{cases} \text{Asíntota } y = \frac{3}{4}x \to \begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \\ \text{Centro } (0,0) \end{cases} \\ \text{Foco } (-10,0) \to c = 10 \to 10^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \to \begin{cases} a = 8 \\ b = 6 \end{cases} \to \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

53. Hallar los elementos de la hipérbola siguiente:

$$\frac{(x-2)^2}{36}-\frac{(y+1)^2}{64}=1$$

VER VÍDEO https://youtu.be/cTfc_Ww3lU8

$$\begin{cases} \text{Centro} = (2,-1) \\ a^2 = 36; a = 6 \\ b^2 = 64; b = 8 \\ c^2 = a^2 + b^2; c = 10 \\ \text{Vértices:} \begin{cases} (8,-1) \\ (-4,-1) \end{cases} \\ \text{Focos:} \begin{cases} (12,-1) \\ (-4,-1) \end{cases} \\ \text{Asíntotas:} \begin{cases} y = \dfrac{4}{3}\cdot x \\ y = \dfrac{-4}{3}\cdot x \end{cases} \end{cases}$$

54. Escribe la ecuación de la hipérbola que tiene asíntota y = 1 – ¾ (x – 3) y un vértice en (15, 1)

VER VÍDEO https://youtu.be/sIt5ArS1H78

$$\begin{cases} \text{Asíntota } y = 1 - \dfrac{3}{4}(x-3) \rightarrow \text{Centro } (3,1) \\ \text{Vértice } (15,1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{4} \rightarrow b = 9 \end{cases}$$

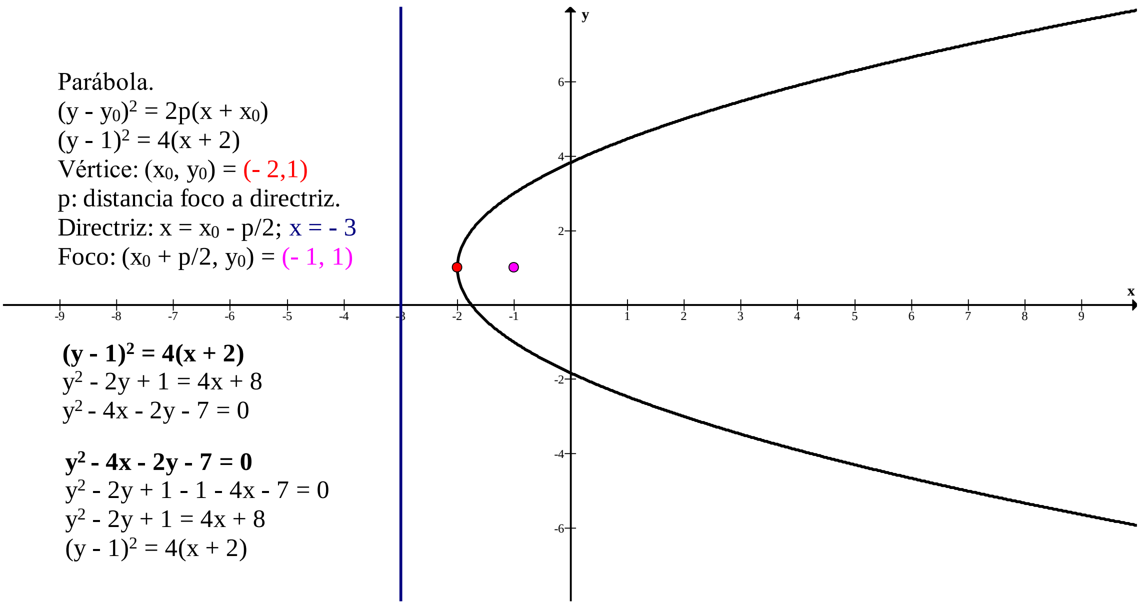
$$\frac{(x-3)^2}{144}-\frac{(y-1)^2}{81}=1$$

La parábola.

La **parábola** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto llamado foco y de una recta llamada directriz

55. Estudia y representa la parábola $(y - 1)^2 = 4(x + 2)$

VER VÍDEO https://youtu.be/W1Ud9A0o5aU

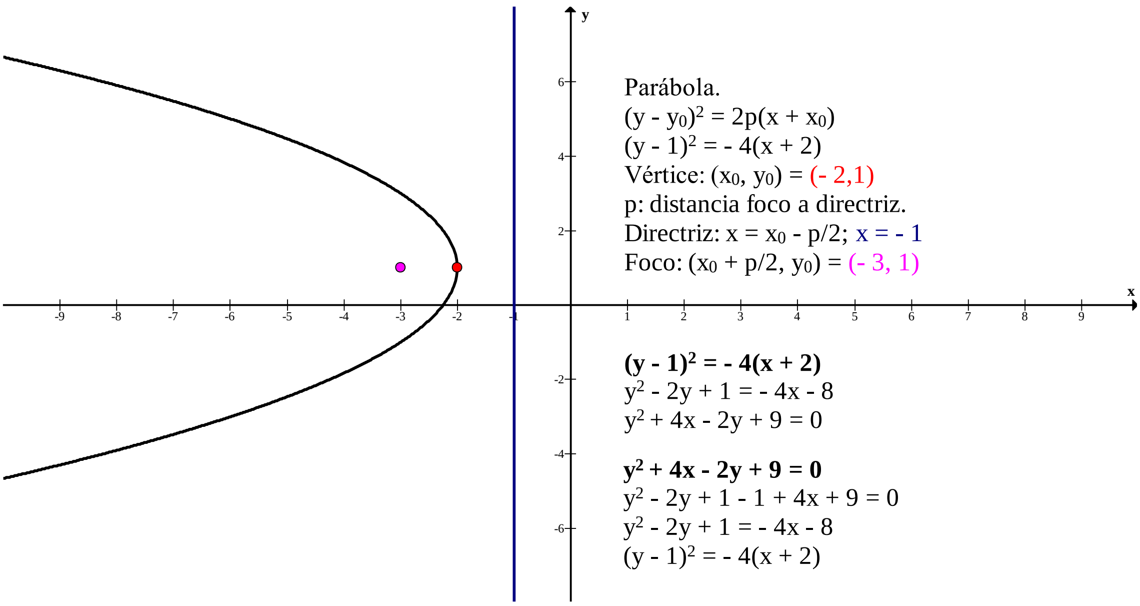


Parábola.
$(y - y_0)^2 = 2p(x + x_0)$
$(y - 1)^2 = 4(x + 2)$
Vértice: $(x_0, y_0) = (-2,1)$
p: distancia foco a directriz.
Directriz: $x = x_0 - p/2$; $x = -3$
Foco: $(x_0 + p/2, y_0) = (-1, 1)$

$\mathbf{(y - 1)^2 = 4(x + 2)}$
$y^2 - 2y + 1 = 4x + 8$
$y^2 - 4x - 2y - 7 = 0$

$\mathbf{y^2 - 4x - 2y - 7 = 0}$
$y^2 - 2y + 1 - 1 - 4x - 7 = 0$
$y^2 - 2y + 1 = 4x + 8$
$(y - 1)^2 = 4(x + 2)$

56. Estudia y representa la parábola $(y - 1)^2 = -4(x + 2)$
VER VÍDEO https://youtu.be/AJ343PiF5CQ

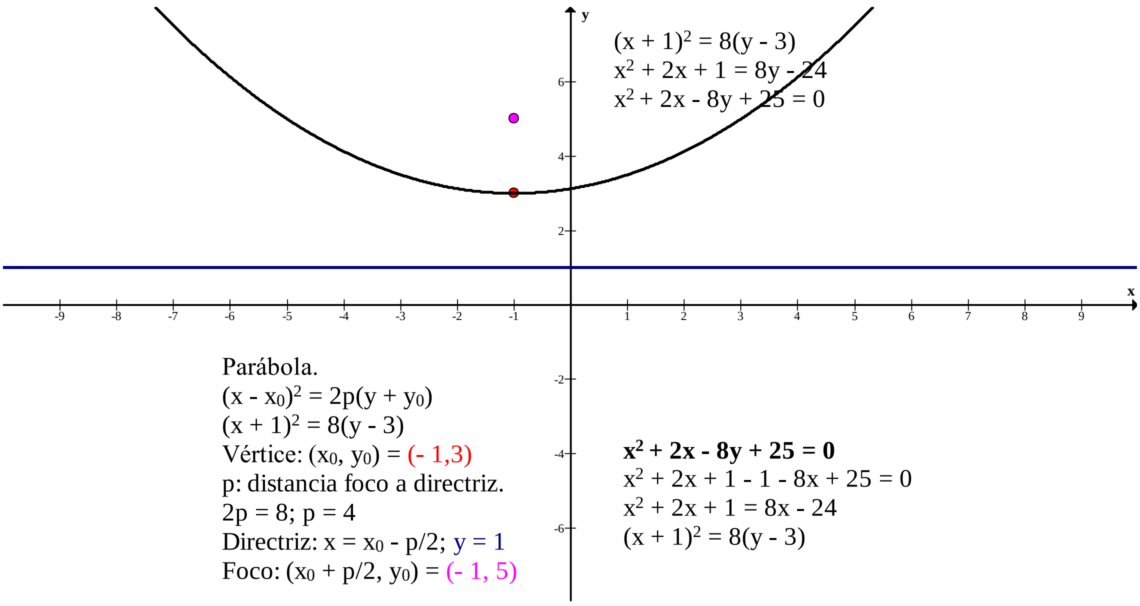


Parábola.
$(y - y_0)^2 = 2p(x + x_0)$
$(y - 1)^2 = -4(x + 2)$
Vértice: $(x_0, y_0) = (-2,1)$
p: distancia foco a directriz.
Directriz: $x = x_0 - p/2$; $x = -1$
Foco: $(x_0 + p/2, y_0) = (-3, 1)$

$\mathbf{(y - 1)^2 = -4(x + 2)}$
$y^2 - 2y + 1 = -4x - 8$
$y^2 + 4x - 2y + 9 = 0$

$\mathbf{y^2 + 4x - 2y + 9 = 0}$
$y^2 - 2y + 1 - 1 + 4x + 9 = 0$
$y^2 - 2y + 1 = -4x - 8$
$(y - 1)^2 = -4(x + 2)$

57. Estudia y representa la parábola $(x + 1)^2 = 8(y - 3)$
VER VÍDEO https://youtu.be/ZONAgtA7G24



58. Estudia y representa la parábola $(x + 1)^2 = -8(y - 3)$
VER VÍDEO https://youtu.be/uCArf4vBOkc