

1

**SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.**



## TRIGONOMETRÍA.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS. TEOREMAS DEL SENO Y DEL COSENO. DEMOSTRAR Y SIMPLIFICAR EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

### 1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

#### Ecuación fundamental

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \quad \left| \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \left| \quad 1 + \operatorname{tag}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \left| \quad 1 + \operatorname{cotag}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \right. \right. \right.$$

1.
  - a. Representa un ángulo del tercer cuadrante cuyo seno sea  $\frac{-3}{4}$ .
  - b. Representa un ángulo del segundo cuadrante cuyo coseno sea  $-0,8$ .
  - c. Representa un ángulo del primer cuadrante cuya tangente valga 2.

VER VÍDEO <https://youtu.be/6Sj0mTnpFpY>

2.

- a. Si  $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$  y  $\alpha \in \text{II}$ ; hallar  $\operatorname{cos}\alpha$  y  $\operatorname{tag}\alpha$ .
- b. Si  $\operatorname{cos}\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}$  y  $\alpha \in \text{III}$ ; hallar  $\operatorname{sen}\alpha$  y  $\operatorname{tag}\alpha$ .
- c. Si  $\operatorname{tag}\alpha = \sqrt{3}$  y  $\alpha \in \text{I}$ ; hallar  $\operatorname{cos}\alpha$  y  $\operatorname{sen}\alpha$ .

VER VÍDEO <https://youtu.be/LXx7ftcw4jM>

3. Calcular las razones trigonométricas de  $x$  sabiendo que  $\operatorname{sen}x = \frac{1}{2}$ .  $x \in \text{II}$ .

VER VÍDEO [https://youtu.be/Wb\\_6d3yVj5E](https://youtu.be/Wb_6d3yVj5E)

$\operatorname{sen}^2x + \operatorname{cos}^2x = 1 \rightarrow 1/4 + \operatorname{cos}^2x = 1 \rightarrow \operatorname{cos}^2x = 3/4 \rightarrow \operatorname{cos}x = -\sqrt{\frac{3}{4}}$ ; negativo pues en el segundo cuadrante el cos es negativo.

CARLOS ALCOVER GARAU. LICENCIADO EN CIENCIAS QUÍMICAS (U.L.B.) Y DIPLOMADO EN TECNOLOGÍA DE ALIMENTOS (I.A.T.A.).

2

$$\tan x = \frac{\text{sen} x}{\text{cos} x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

4. Calcular las razones trigonométricas de  $x$  sabiendo que  $\text{cos} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .  $x \in \text{IV}$ .

$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1 \rightarrow \text{sen}^2 x + 3/4 = 1 \rightarrow \text{sen}^2 x = 1/4 \rightarrow \text{sen} x = -1/2$ ; negativo pues en el cuarto cuadrante el sen es negativo.

$$\tan x = \frac{\text{sen} x}{\text{cos} x} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

5. Calcular las razones trigonométricas de  $x$  sabiendo que  $\tan x = 1$ .  $x \in \text{III}$ .

VER VÍDEO [https://youtu.be/586\\_xMaFgNc](https://youtu.be/586_xMaFgNc)

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} \rightarrow 1 + 1^2 = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} \rightarrow \text{cos}^2 \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \text{cos} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan x = \frac{\text{sen} x}{\text{cos} x} \rightarrow \text{sen} x = \text{cos} x \cdot \tan x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

6. Sabiendo que  $\text{sen} 15^\circ = 0,26$ , calcular:

a.  $\text{cos} 75^\circ$ .

b.  $\text{sen} 105^\circ$ .

c.  $\tan 165^\circ$ .

d.  $\text{sen} 195^\circ$ .

e.  $\text{cos} 255^\circ$ .

f.  $\tan 285^\circ$ .

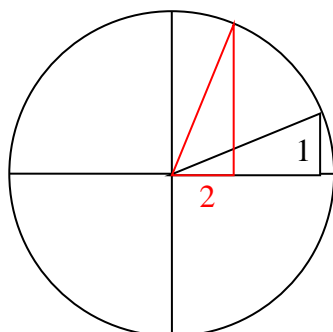
g.  $\text{sen} 345^\circ$ .

VER VÍDEO <https://youtu.be/0NgdWEfsYXk>

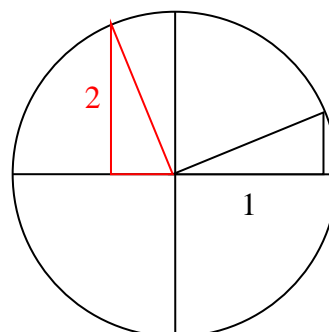
$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1 \rightarrow 0,26^2 + \text{cos}^2 x = 1 \rightarrow \text{cos}^2 x = 0,93 \rightarrow \text{cos} x = 0,97$$

$$\tan x = \frac{\text{sen} x}{\text{cos} x} = \frac{0,26}{0,97} = 0,27$$

$$\text{a. } \underbrace{\text{cos} 75^\circ}_2 = \underbrace{\text{sen} 15^\circ}_1 = 0,26$$

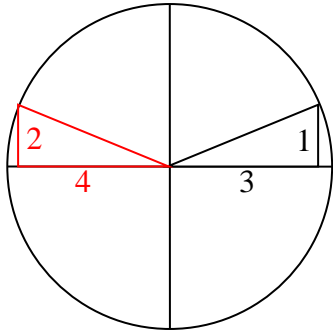


$$\text{b. } \underbrace{\text{sen} 105^\circ}_2 = \underbrace{\text{cos} 15^\circ}_1 = 0,97$$

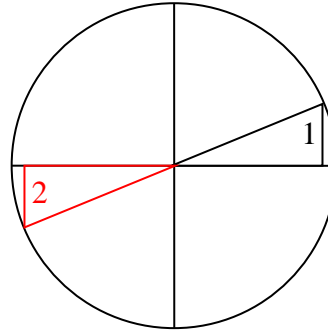




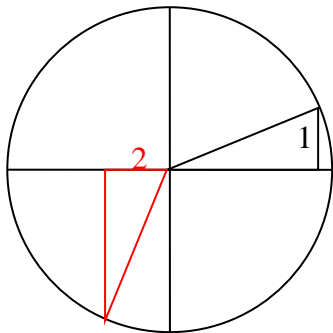
$$c. \tan 165^\circ = \frac{\overbrace{\text{sen}165^\circ}^2}{\underbrace{\text{cos}165^\circ}_4} = \frac{\overbrace{\text{sen}15^\circ}^1}{\underbrace{-\text{cos}15^\circ}_3} = -0,27$$



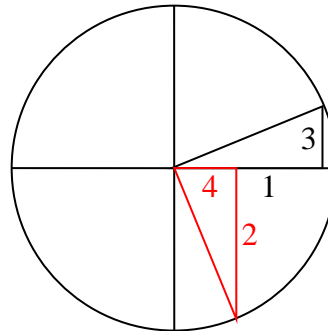
$$d. \underbrace{\text{sen}195^\circ}_2 = \underbrace{-\text{sen}15^\circ}_1 = -0,26$$



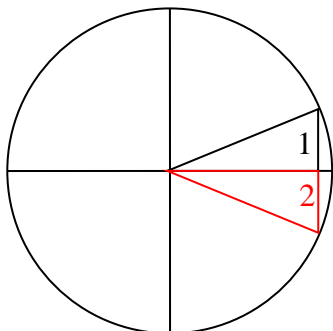
$$e. \underbrace{\text{cos}255^\circ}_2 = \underbrace{-\text{sen}15^\circ}_1 = -0,26$$



$$f. \tan 285^\circ = \frac{\overbrace{\text{sen}285^\circ}^2}{\underbrace{\text{cos}285^\circ}_4} = \frac{\overbrace{-\text{cos}15^\circ}^1}{\underbrace{\text{sen}15^\circ}_3} = -3,7$$



$$g. \underbrace{\text{sen}345^\circ}_2 = \underbrace{-\text{sen}15^\circ}_1 = -0,26$$



7. Sabiendo que  $\text{sen}x = 0'8$  y que  $x$  está en el II cuadrante, calcular:

- $\text{cos}x$
- $\text{tan}x$
- $\text{sen}(90 + x)$
- $\text{cos}(180 - x)$

e.  $\tan(270 + x)$

a.  $\text{sen}^2x + \text{cos}^2x = 1 \rightarrow 0,8^2 + \text{cos}^2x = 1 \rightarrow \text{cos}^2x = 0,36 \rightarrow \text{cos}x = -0,6$  ;  
negativo pues en el segundo cuadrante el cos es negativo.

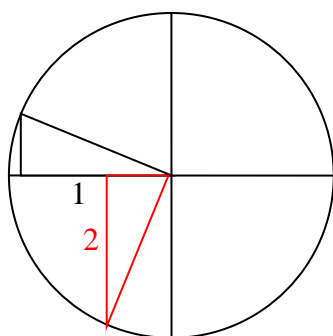
$$\text{b. } \tan x = \frac{\text{sen}x}{\text{cos}x} = \frac{0,8}{-0,6} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{c. } \overbrace{\text{sen}(90 + x)}^2 = \overbrace{\text{cos}x}^1 = -0,6$$

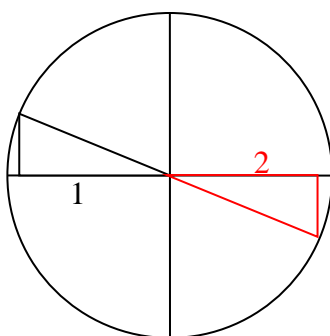
$$\text{d. } \overbrace{\text{cos}(180 - x)}^2 = -\overbrace{\text{cos}x}^1 = 0,6$$

$$\text{e. } \tan(270 + x) = \frac{\overbrace{\text{sen}(270 + x)}^2}{\underbrace{\text{cos}(270 + x)}_4} = \frac{-\overbrace{\text{cos}x}^1}{-\underbrace{\text{sen}x}_3} = \frac{-3}{4}$$

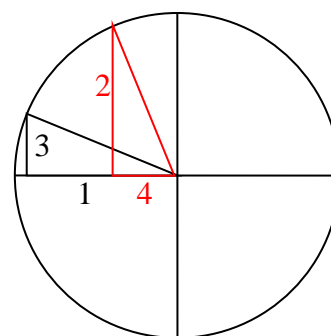
c



d



e



8. Sabiendo que  $\text{sen } \alpha = 3/5$  y que  $\alpha$  se encuentra en el 2º cuadrante, calcular:

a.  $\tan 3\alpha$

b.  $\cos \alpha + 3\tan \alpha - \cos 2\alpha$

VER VÍDEO <https://youtu.be/KJd1jsK3ESE>

9. Sabiendo que  $\text{sen } a = 3/5$  y  $\text{cos } a < 0$  y  $\text{cos } b = -1/4$  y  $180^\circ < b < 270^\circ$  hallar:

$\text{Sen}(a - b)$ ,  $\tan 2a$  y  $\tan a/2$

VER VÍDEO <https://youtu.be/DhudcCeKX2U>

10. Si  $\tan 2x = \frac{1}{2}$ , calcular  $x$ ,  $\tan x$  y  $\tan 4x$

VER VIDEO <https://youtu.be/HlohAlqX9ZQ>

$$\tan 2x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x = 26'57^\circ \rightarrow x = 13'28^\circ \\ 2x = 206'57^\circ \rightarrow x = 103'28^\circ \end{cases}$$

$$\tan 2x = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{1}{2} \rightarrow 4 \cdot \tan x = 1 - \tan^2 x \rightarrow \tan^2 x + 4 \cdot \tan x - 1 = 0$$

$$\rightarrow \tan x = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$\tan 4x = \frac{2 \cdot \tan 2x}{1 - \tan^2 2x} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$$

11. Sabiendo que  $\sin x = -2/5$ , siendo  $\pi < x < 3\pi/2$ , calcula  $\tan 2x$  y  $\tan 3x$

VER VÍDEO <https://youtu.be/hhNMTK4BgVQ>

12. Si  $\sin x = 0'8$  y  $x \in \text{II}$ , calcular:

a)  $\cos x$  y  $\tan x$ .

b)  $\sin 2x$

c)  $\cos \frac{x}{2}$

d)  $\sin(\pi + x)$

VER VIDEO <https://youtu.be/SdBmDb-PxjY>

a) Sustituyendo  $\sin x = 0'8$  en la ecuación  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow 0'64 + \cos^2 x = 1 \rightarrow$

$\cos x = \pm 0'6$ . Como el ángulo  $x$  se encuentra en el segundo cuadrante tomaremos  $\cos x = -0'6$ .

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0'8}{-0'6} = -\frac{4}{3}$$

b)  $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot 0'8 \cdot (-0'6) = -0'96$

$$\text{c) } \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0'6}{2}} = \sqrt{0'2}$$

Debemos elegir el signo.  $x \in \text{II} \rightarrow 90 \leq x \leq 180 \rightarrow 45 \leq x/2 \leq 90 \rightarrow x/2 \in \text{I}$ , signo +

$$\text{d) } \sin(\pi + x) = \underbrace{\sin \pi}_0 \cdot \cos x + \sin x \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1} = -\sin x = -0'8$$

13. Si  $\tan x = 2$  y  $x \in \text{I}$ , calcular:

a)  $\sin x$  y  $\cos x$ .

b)  $\tan 2x$

c)  $\cotan(x - \pi)$

d)  $\cos \frac{x}{2}$

VER VIDEO [https://youtu.be/xTGR4\\_0p3iQ](https://youtu.be/xTGR4_0p3iQ)

$$\text{Si } \tan x = 2 \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \rightarrow \sin x = 2 \cdot \cos x \rightarrow (2 \cdot \cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \rightarrow$$

$$5 \cdot \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \stackrel{x \in \text{I}}{\cos x > 0} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin x = 2 \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}$$

14. Sabiendo que  $\tan x = 4$ , donde  $\pi < x < 3\pi/2$ , calcular  $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

VER VÍDEO <https://youtu.be/RrusCGpomGU>

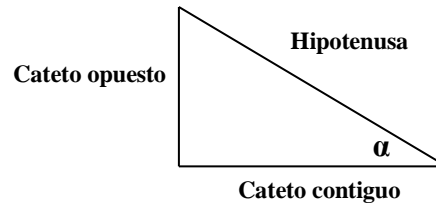
## 2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS.

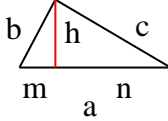
6

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{cos}\alpha = \frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}}$$

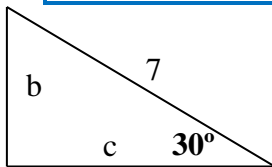
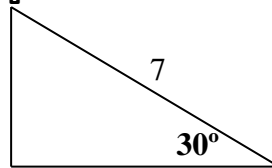
$$\text{tag}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}$$



<p><b>Teorema del seno.</b>  <math>\frac{a}{\text{senA}} = \frac{b}{\text{senB}} = \frac{c}{\text{senC}}</math></p>	<p><b>Teorema del coseno.</b>  <math>a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\text{cosA}</math>  <math>b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\text{cosB}</math>  <math>c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\text{cosC}</math></p>	 <p><b>Triángulo rectángulo</b></p>	<p><b>T. de Pitágoras</b>  <math>a^2 = b^2 + c^2</math>  <math>b^2 = m^2 + h^2</math>  <math>c^2 = n^2 + h^2</math>  <b>T.del cateto.</b>  <math>b^2 = m.a</math>  <math>c^2 = n.a</math>  <b>T. de la altura.</b>  <math>h^2 = m.n</math></p>
---	---	---	--

### a. Triángulos rectángulos.

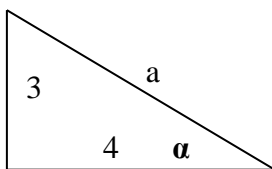
15. Hallar los catetos del siguiente triángulo.



$$\text{sen}30 = \frac{b}{7} \rightarrow b = 7.\text{sen}30 = 3'5$$

$$\text{cos}30 = \frac{c}{7} \rightarrow c = 7.\text{cos}30 = 6'06$$

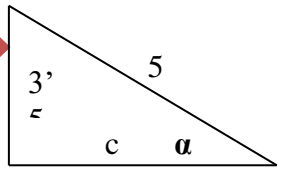
16. Resolver un triángulo rectángulo de cateto 3 y 4 cm.



$$\text{tan}\alpha = \frac{3}{4} \rightarrow \alpha = \text{shift tan} \frac{3}{4} = 36'87^{\circ}$$

$$\text{Pitágoras: } a = \sqrt{b^2 + c^2} = 5 \text{ cm.}$$

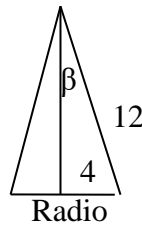
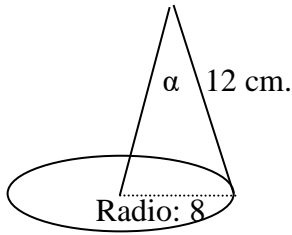
17. Una escalera de 5 m. se apoya en la pared a 3'5 m. de altura. ¿A qué distancia de la pared se apoya? ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo?



$$\text{sen } \alpha = \frac{3'}{5} \rightarrow \alpha = \text{shift sen } \frac{3'}{5} = 44'43^\circ$$

Pitágoras:  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3'57 \text{ cm.}$

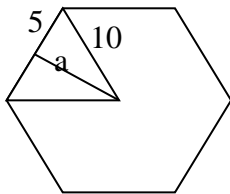
18. Las patas de un compás miden 12 cm. ¿Qué ángulo forman si dibujamos una circunferencia de 16 cm. de diámetro?



$$\text{sen } \beta = \frac{4}{12} \rightarrow \beta = 19'47^\circ$$

$$\alpha = 2\beta = 38'94^\circ$$

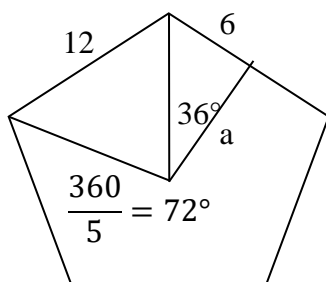
19. Calcular el área de un hexágono regular de 10 cm. de lado.



Pitágoras:  $a = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8'66 \text{ cm.}$

$$\text{área} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 8'66}{2} = 259'8 \text{ cm}^2.$$

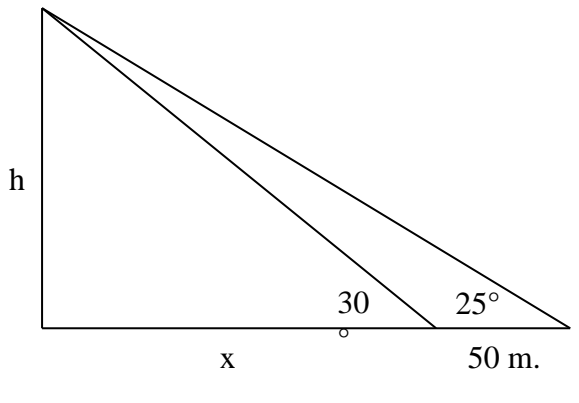
20. Calcular el área de un pentágono regular de 12 cm. de lado.



$$\tan 36 = \frac{6}{a} \rightarrow a = \frac{6}{\tan 36} = 8'26 \text{ cm.}$$

$$\text{área} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{5 \cdot 12 \cdot 8'26}{2} = 247'8 \text{ cm}^2.$$

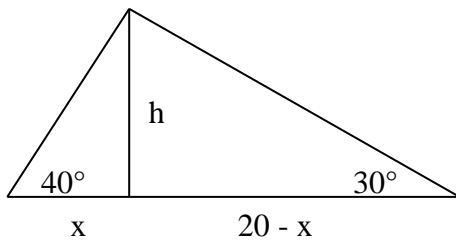
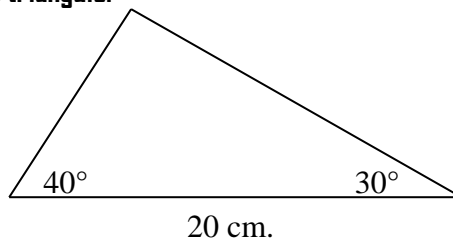
21. Vemos un poste bajo un ángulo de 30°. Si nos alejamos 50 m. la veremos bajo un ángulo de 25°. Calcular la altura del poste.



$$\begin{cases} \tan 30 = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \cdot \tan 30 \\ \tan 25 = \frac{h}{50 + x} \rightarrow h = (50 + x) \cdot \tan 25 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \cdot \tan 30 &= (50 + x) \cdot \tan 25 \\ x \cdot \tan 30 &= 50 \cdot \tan 25 + x \cdot \tan 25 \\ x \tan 30 - x \tan 25 &= 50 \cdot \tan 25 \\ x \cdot (\tan 30 - \tan 25) &= 50 \cdot \tan 25 \\ x &= \frac{50 \cdot \tan 25}{\tan 30 - \tan 25} = \mathbf{210 \text{ m.}} \end{aligned}$$

22. Hallar el área del siguiente triángulo.



$$\begin{cases} \tan 30 = \frac{h}{20 - x} \rightarrow h = (20 - x) \cdot \tan 30 \\ \tan 40 = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \cdot \tan 40 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (20 - x) \cdot \tan 30 &= x \cdot \tan 40 \\ 20 \cdot \tan 30 - x \cdot \tan 30 &= x \cdot \tan 40 \\ 20 \cdot \tan 30 &= x \cdot \tan 40 + x \cdot \tan 30 \\ 20 \cdot \tan 30 &= x \cdot (\tan 40 + \tan 30) \\ x &= \frac{20 \cdot \tan 30}{\tan 40 + \tan 30} = 8'15 \text{ cm.} \\ h &= x \cdot \tan 40 = 6'84 \text{ cm.} \\ \text{área} &= \mathbf{68'4 \text{ cm}^2}. \end{aligned}$$

### b. Resolución de todo tipo de triángulos.

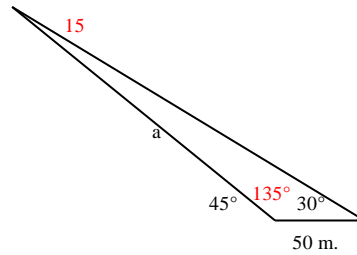
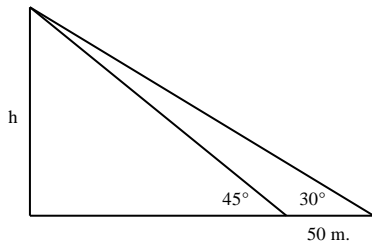
23. a. Calcula la altura de una torre sabiendo la visual trazada desde un punto A, situado en el suelo, al punto más alto de la torre, forma con la horizontal un ángulo de  $45^\circ$  y si la misma medida se hace desde un punto B, entonces el ángulo es  $30^\circ$ . A, B y el pie de la torre están alineados y la distancia entre A y B es de 50 m.

b. Desea saber la altura de un edificio de base inaccesible A. Por esta razón se coloca un teodolito en los puntos C y D. (A, C y D están en el suelo y no alineados). El ángulo de elevación del edificio medido desde C, vale  $60^\circ$  y el ángulo  $ACD = 45^\circ$ . Desde D se mide el ángulo  $ADC = 60^\circ$ . La distancia entre C y D es de 10 m.

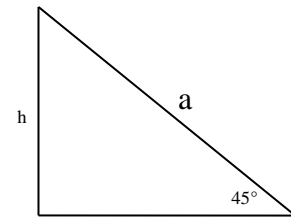
VER VÍDEO <https://youtu.be/Pv5hpshDQ7U>



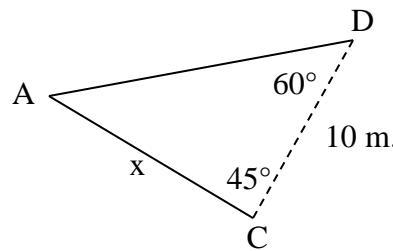
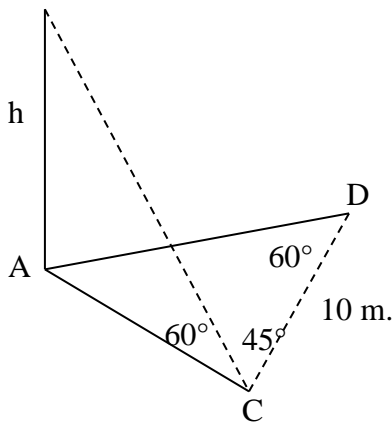
9



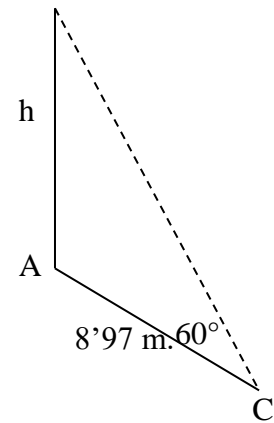
$$\frac{a}{\sin 30} = \frac{50}{\sin 15} \rightarrow a = 96,59 \text{ m.}$$



$$\frac{96,59}{\sin 90} = \frac{h}{\sin 45} \rightarrow h = 68,3 \text{ m.}$$



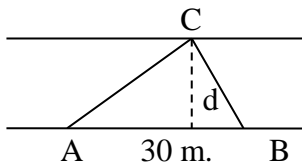
El  $\hat{A}$  vale  $180 - C - D = 75^\circ$   
 Hallamos x:  $\frac{10}{\sin 75} = \frac{x}{\sin 60}$   
 $x = 8'97 \text{ m}$



$$\tan 60 = \frac{h}{8'97} \rightarrow h = 15'53 \text{ m}$$

24. Un río tiene dos orillas paralelas. Desde los puntos A y B situados en la misma orilla se observa un punto C en el lado opuesto. Si trazamos una visual de C perpendicular a la orilla opuesta, está entre A y B. Las visuales de A a C y B a C forman con la dirección de la orilla ángulos de  $45^\circ$  y  $60^\circ$  respectivamente. Calcular la anchura del río sabiendo que de A a B hay 30 m.

VER VÍDEO <https://youtu.be/sgHVbG81LQo>



$$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 75^\circ$$

$$\frac{30}{\sin 75} = \frac{AC}{\sin 60}$$

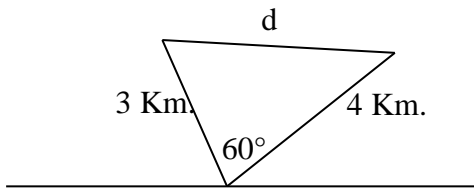
$$AC = 26'9 \text{ cm}$$

$$\sin 45 = \frac{d}{26'9}$$

$$d = 19 \text{ m.}$$

25. Dos aviones salen al mismo tiempo del aeropuerto en diferentes direcciones, formando éstas un ángulo de  $60^\circ$ , suponiendo que van en línea recta y han recorrido 3 km y 4 km respectivamente. ¿Qué distancia los separan?

10



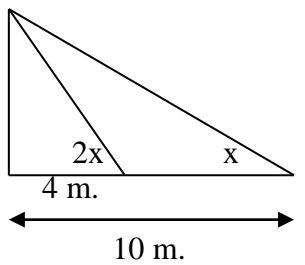
Aplicando el teorema del coseno:

$$d^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60$$

$$d = 3'6 \text{ Km.}$$

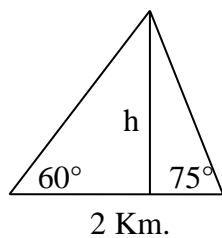
26. A 10 m. del pie de una estatua, se ve bajo un ángulo  $X$  y a 4 m bajo de un ángulo  $2x$  calcula la altura de la estatua.

VER VÍDEO <https://youtu.be/QORpM-gJdXU>



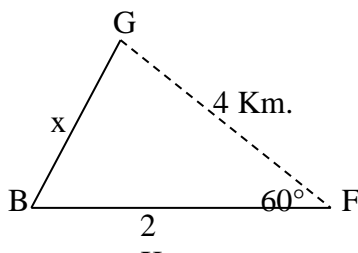
$$\left\{ \begin{array}{l} \tan x = \frac{h}{10} \\ \tan 2x = \frac{h}{4} \rightarrow \frac{2 \cdot \frac{h}{10}}{1 - \frac{h^2}{100}} = \frac{h}{4} \end{array} \right. \rightarrow \frac{2 \cdot \frac{h}{10}}{1 - \left(\frac{h}{10}\right)^2} = \frac{h}{4} \rightarrow h = 4'47 \text{ m.}$$

27. Dos personas distantes entre sí 2 km midieron al mismo tiempo la altura de un avión, que se encuentra en el plano vertical que contiene a las dos personas y se encuentra entre ellas. Los ángulos de elevación del avión medidos por estas personas son  $60^\circ$  y  $75^\circ$  respectivamente. Calcula la altura del avión.



Como el problema 6.  $H = 2'366 \text{ Km.}$

28. Un barco B se encuentra a 2 km de un faro F y está a 4 km de otro G. Sabiendo que el ángulo BFG es de  $60^\circ$ . Calcula la distancia del barco hasta el Faro G.



Aplicando el teorema del coseno:

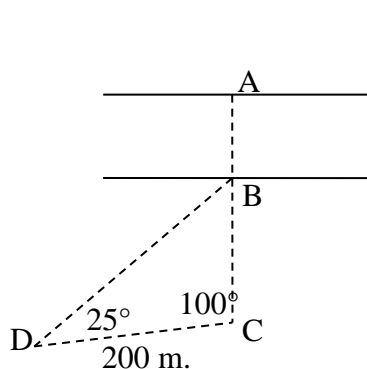
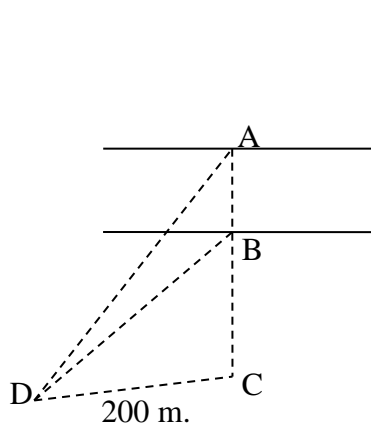
$$x^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60$$

$$x = 3'464 \text{ Km.}$$

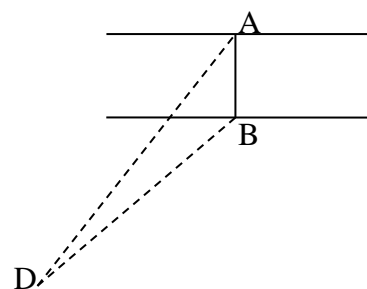
29. Desde un barco se traza una visual al punto más alto de un faro, el ángulo que esta visual forma con la horizontal es de  $30^\circ$ . Cuando el barco ha viajado 200 m. hacia el faro, el ángulo anterior mide  $45^\circ$ . Calcula la distancia mínima del punto más alto del faro a nivel del mar.

Como problema 9. Altura = 273,2 m.

30. Queremos calcular la anchura de un río. Para ello, elegimos un punto C alineado con dos puntos A y B que determinan la anchura del río. A continuación, se determina otro punto D, de modo que el ángulo  $DCA = 100^\circ$  (B, C y D están en el mismo lado del río). A continuación, se muestran las siguientes medidas: distancia CD a 200 m. y ángulos  $BDC = 25^\circ 15'$  y  $ADC = 40^\circ$ .

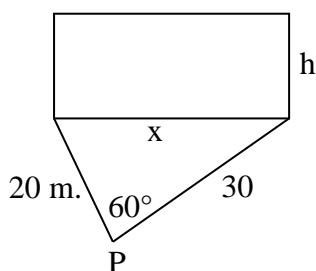
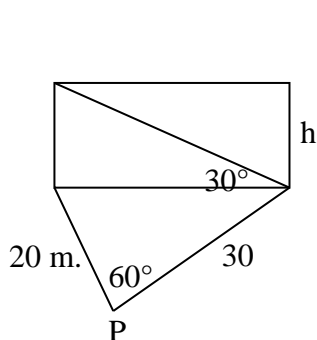


$$\begin{aligned} \text{Ángulo } DBC &= 54^\circ 45' \\ \frac{DB}{\text{sen } 100} &= \frac{200}{\text{sen } 54^\circ 45'} \\ DB &= 241'18 \end{aligned}$$



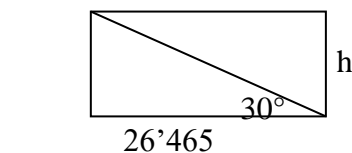
$$\begin{aligned} ADB &= ADC - BDC; \\ ADB &= 14^\circ 45' \\ BAD &= 180 - ADC - DCA = 40^\circ \\ \frac{AB}{\text{sen } 14^\circ 45'} &= \frac{241'18}{\text{sen } 40} \\ AB &= 95'53 \text{ m.} \end{aligned}$$

31. La cara visible de un edificio tiene una forma rectangular, la diagonal del rectángulo forma con la base de un ángulo de  $30^\circ$ . Situados en el suelo, en un punto P, el ángulo bajo el cual se ve el edificio es de  $60^\circ$  y las distancias desde el punto P hasta los extremos de la base son de 20 m. y 30 m. respectivamente. Calcula la altura del edificio.



Aplicando el teorema del coseno:

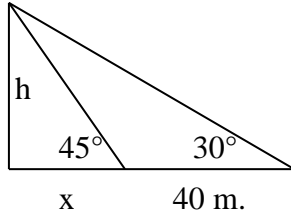
$$\begin{aligned} X^2 &= 30^2 + 20^2 - 2 \cdot 30 \cdot 20 \cdot \cos 60 \\ X &= 26'465 \text{ m.} \end{aligned}$$



$$\tan 30 = \frac{h}{26'465}; H = 15'28 \text{ m.}$$

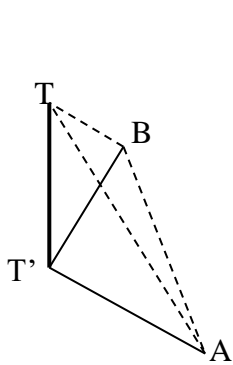
**32. Desde la orilla de un río se ve un árbol que está en la orilla opuesta, bajo un ángulo de  $45^\circ$  y si retrocedes 40 m. se ve bajo un ángulo de  $30^\circ$ . Calcula la altura del árbol.**

Como problema 9 o como sigue.



$$\left\{ \begin{array}{l} \tan 30 = \frac{h}{40 + x} \rightarrow h = (40 + x) \cdot \tan 30 \\ \tan 45 = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \cdot \tan 45 \\ h = 54'6 \text{ m.} \end{array} \right.$$

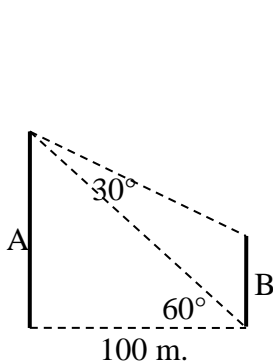
**33. Calcula la altura del punto más alto T de una torre de base inaccesible T' si desde los puntos A y B no alineados con T' se miden los siguientes ángulos:  $\angle T'AT = 30^\circ$ ,  $\angle TAB = 75^\circ$ ;  $\angle TBA = 60^\circ$ . La distancia de A a B es de 20 m.**



$$\begin{aligned} \angle T &= 180 - 60 - 75 \hat{=} 45^\circ \\ \frac{20}{\sin 45} &= \frac{x}{\sin 60}; x = 24'5 \text{ m.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle A &= 30^\circ \\ \sin 30 &= \frac{h}{24'5} \\ h &= 12'25 \text{ m.} \end{aligned}$$

**34. Desde el punto más alto de un edificio A se ve otro edificio B, de arriba abajo, bajo un ángulo de  $30^\circ$  y desde el pie de B se ve el edificio A, también de arriba a abajo, bajo un ángulo de  $60^\circ$ . Si la distancia entre los dos edificios es de 100 m. Calcula la altura de cada uno de ellos.**



$$\begin{aligned} \tan 60 &= \frac{A}{100} \\ A &= 173'2 \text{ m.} \\ \cos 60 &= \frac{100}{x} \\ x &= 200 \text{ m.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{B}{\sin 30} &= \frac{200}{\sin 120} \\ B &= 115'5 \text{ m.} \end{aligned}$$

35. Dos casas A y B están separadas por un río. Si nos situamos en un punto P que está en la misma orilla que A y una distancia de este de 3,6 km. se ve el segmento AB bajo un ángulo de  $45^\circ$ . Si viajamos 6 km. en línea recta hacia A, el segmento mencionado, ahora se ve bajo un ángulo de  $60^\circ$ . Calcula la distancia entre las viviendas A y B. **6 Km.**

36. Dos barcos salen del mismo puerto al mismo tiempo con direcciones que forman  $45^\circ$ . Si uno lleva una velocidad de 18 km/h y el otro 20 km/h. Cuánto tiempo tardarán hasta separarse 60 km. **4 h 5 min. 35 s.**

37. Dos puntos A y B están separados por un río. Nos situamos en la acera de A en un punto C, que está a 90 m. de A y desde el que se ve el segmento AB bajo un ángulo de  $45^\circ$ . Desde A se ve el segmento BC bajo un ángulo de  $75^\circ$ . Calcula la distancia entre los puntos A y B. **73,48**

38. Un cono se encuentra con su base en el suelo, siendo su generatriz de 30 m. y radio de la base de 15 m. A 25 m. del centro de la base y desde el suelo se lanza un proyectil contra el cono, con un ángulo de elevación de  $45^\circ$ , golpeando en un punto que se encuentra en el plano que contiene el punto de lanzamiento y la altura del cono. Calcula la altura del punto de impacto. **23,66 m.**

39. Dos puntos A y B, separados por 50 m., equidisten del pie P de una torre de 100 m de altura. Desde P se ve el segmento AB bajo un ángulo de  $30^\circ$ . Calcula la distancia entre el punto más alto de la torre y el punto A. **139 m.**

40. Calcula la altura de una torre, sabiendo que desde el suelo y a 20 m de su base el ángulo de elevación es  $2x$  y que a 5 m. el ángulo es  $x$ . **14.14 M**

41. Un avión vuela a una velocidad constante de 300 km/h siguiendo una trayectoria paralela al suelo. Sea P la posición del avión en un momento determinado, Q la posición en 6 s. y R después de 1 minuto. Y sea O la proyección de P sobre el suelo. Se sabe que  $PQ = x$  y  $PR = 2x$ . Calcula la altura del avión. **559 m.**

### 3. DEMOSTRACIONES Y SIMPLIFICAR.

#### Ecuación fundamental

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

#### Fórmulas del ángulo doble

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

#### Fórmulas del ángulo mitad

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

#### Fórmulas de la suma y de la resta

14

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}a \cdot \text{cos}b + \text{sen}b \cdot \text{cos}a$$

$$\text{cos}(a + b) = \text{cos}a \cdot \text{cos}b - \text{sen}a \cdot \text{sen}b$$

$$\text{tag}(a + b) = \frac{\text{tag}a + \text{tag}b}{1 - \text{tag}a \cdot \text{tag}b}$$

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen}a \cdot \text{cos}b - \text{sen}b \cdot \text{cos}a$$

$$\text{cos}(a - b) = \text{cos}a \cdot \text{cos}b + \text{sen}a \cdot \text{sen}b$$

$$\text{tag}(a - b) = \frac{\text{tag}a - \text{tag}b}{1 + \text{tag}a \cdot \text{tag}b}$$

### Transformación de suma en producto

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2 \cdot \text{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \text{cos} \frac{A-B}{2}$$

$$\text{sen}A - \text{sen}B = 2 \cdot \text{cos} \frac{A+B}{2} \cdot \text{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\text{cos}A + \text{cos}B = 2 \cdot \text{cos} \frac{A+B}{2} \cdot \text{cos} \frac{A-B}{2}$$

$$\text{cos}A - \text{cos}B = -2 \cdot \text{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \text{sen} \frac{A-B}{2}$$

### Transformación de producto en suma

$$\text{sen}a \cdot \text{cos}b = \frac{1}{2} [\text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b)]$$

$$\text{cos}a \cdot \text{cos}b = \frac{1}{2} [\text{cos}(a + b) + \text{cos}(a - b)]$$

$$\text{sen}a \cdot \text{sen}b = \frac{-1}{2} [\text{cos}(a + b) - \text{cos}(a - b)]$$

42. Demostrar:

$$\frac{\text{sen}^2 \alpha - \text{cos}^2 \alpha}{\text{sen} \alpha - \text{sen}^3 \alpha + \text{cos} \alpha - \text{cos}^3 \alpha} = \text{sec} \alpha - \text{cosec} \alpha$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/F2KFvAjT0hs>

43. Simplifica la expresión siguiente.

$$\frac{2 \cdot \text{cos} \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right) \cdot \text{cos} \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\text{cos} 2\alpha}$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/MQkmqm3hbMU>

44. Demostrar:

$$\frac{\text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b)}{\text{cos}(a + b) + \text{cos}(a - b)} = \tan a$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/e7oNoOd9k0A>

45. Demostrar:

$$\text{cotan}(a + b) = \frac{\text{cotan} a \cdot \text{cotan} b - 1}{\text{cotan} a + \text{cotan} b}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/Xu9234-eoQw>

$$\frac{\text{cotan} a \cdot \text{cotan} b - 1}{\text{cotan} a + \text{cotan} b} = \frac{\frac{\text{cos} a}{\text{sen} a} \cdot \frac{\text{cos} b}{\text{sen} b} - 1}{\frac{\text{cos} a}{\text{sen} a} + \frac{\text{cos} b}{\text{sen} b}} = \frac{\frac{\text{cos} a \cdot \text{cos} b - \text{sen} a \cdot \text{sen} b}{\text{sen} a \cdot \text{sen} b}}{\frac{\text{cos} a \cdot \text{sen} b + \text{cos} b \cdot \text{sen} a}{\text{sen} a \cdot \text{sen} b}} =$$

$$\frac{\text{cos}(a + b)}{\text{sen}(a + b)} = \text{cotan}(a + b)$$

46. Demostrar:  $2 \cdot \tan x \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen} x = \tan x$

VER VIDEO <https://youtu.be/RDQBIPuGOIc>

$$2. \tan x \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - \sin x = 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{2} - \sin x = \frac{\sin x + \sin x \cdot \cos x}{\cos x} - \sin x =$$

$$= \frac{\sin x + \sin x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos x}{\cos x} = \tan x$$

**47. Demostrar:  $\cos x \cdot \cos(x - y) + \sin x \cdot \sin(x - y) = \cos y$**

VER VIDEO [https://youtu.be/vY\\_A8QbUv-g](https://youtu.be/vY_A8QbUv-g)

$$\cos x \cdot \cos(x - y) + \sin x \cdot \sin(x - y) = \cos x \cdot (\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y) + \sin x \cdot (\sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x) = \cos^2 x \cdot \cos y + \sin^2 x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin y \cdot \cos x$$

igual a 1

$$= (\cos^2 x + \sin^2 x) \cdot \cos y = \cos y$$

**48. Demostrar:  $\tan(x + k\pi) = \tan x$**

VER VIDEO [https://youtu.be/ihXKrL\\_2JDU](https://youtu.be/ihXKrL_2JDU)

$$\tan(x + k\pi) = \frac{\tan x + \overbrace{\tan k\pi}^0}{1 - \underbrace{\tan x \cdot \tan k\pi}_0} = \tan x$$

**49. Demostrar:  $\cos 2x + \sin 2x \cdot \tan x = 1$**

VER VIDEO <https://youtu.be/eGicXq9AzLE>

$$\cos 2x + \sin 2x \cdot \tan x = \cos^2 x - \sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x + 2 \cdot \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

**50. Simplificar:**

$$\frac{\sin 3x - \sin 5x}{\cos 3x + \cos 5x}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/jkxyEhGo738>

$$\frac{\sin 3x - \sin 5x}{\cos 3x + \cos 5x} = \frac{2 \cdot \cos \frac{3x + 5x}{2} \cdot \sin \frac{3x - 5x}{2}}{2 \cdot \cos \frac{3x + 5x}{2} \cdot \cos \frac{3x - 5x}{2}} = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \tan(-x) = -\tan x$$

**51. Simplificar:**

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/CX7NZn3IEDw>

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{2 \cdot \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

**52. Simplificar:**

CARLOS ALCOVER GARAU. LICENCIADO EN CIENCIAS QUÍMICAS (U.L.B.) Y DIPLOMADO EN TECNOLOGÍA DE ALIMENTOS (I.A.T.A.).

$$\frac{\text{sen}^2 x}{1 - \cos x} \cdot \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right)$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/Ms7jZTt8aK4>

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}^2 x}{1 - \cos x} \cdot \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) &= \frac{\text{sen}^2 x}{1 - \cos x} \cdot \left(1 + \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\right) = \frac{\text{sen}^2 x}{1 - \cos x} \cdot \frac{2}{1 + \cos x} \\ &= \frac{2 \cdot \text{sen}^2 x}{1 - \cos^2 x} = \frac{2 \cdot \text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} = 2 \end{aligned}$$

### 53. Desarrollar $\cos(x + y + z)$

VER VIDEO <https://youtu.be/WzHgiececkms>

$$\begin{aligned} \cos(x + y + z) &= \cos[(x + y) + z] = \cos(x + y) \cdot \cos z - \text{sen}(x + y) \cdot \text{sen} z = \\ &= (\cos x \cdot \cos y - \text{sen} x \cdot \text{sen} y) \cdot \cos z - (\text{sen} x \cdot \cos y + \text{sen} y \cdot \cos x) \cdot \text{sen} z = \\ &= \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z - \text{sen} x \cdot \text{sen} y \cdot \cos z - \text{sen} x \cdot \cos y \cdot \text{sen} z - \cos x \cdot \text{sen} y \cdot \text{sen} z \end{aligned}$$

### 54. Si $\tan 2x = \frac{1}{2}$ , calcular $x$ , $\tan x$ y $\tan 4x$

VER VIDEO <https://youtu.be/HlohAlqX9ZQ>

$$\begin{aligned} \tan 2x = \frac{1}{2} &\rightarrow \begin{cases} 2x = 26'57^\circ \rightarrow x = 13'28^\circ \\ 2x = 206'57^\circ \rightarrow x = 103'28^\circ \end{cases} \\ \tan 2x = \frac{1}{2} &\rightarrow \frac{1}{1 - \tan^2 x} = \frac{1}{2} \rightarrow 4 \cdot \tan x = 1 - \tan^2 x \rightarrow \tan^2 x + 4 \cdot \tan x - 1 = 0 \\ &\rightarrow \tan x = -2 \pm \sqrt{3} \\ \tan 4x &= \frac{2 \cdot \tan 2x}{1 - \tan^2 2x} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

### 55. Sabiendo que $a + b = 60^\circ$ , ¿cuál de las dos expresiones es mayor? $\text{sen} a + \text{sen} b$ o $\cos a + \cos b$

VER VIDEO <https://youtu.be/NgaccBVcj14>

$$\begin{aligned} \text{Si } a + b = 60 &\rightarrow b = 60 - a \rightarrow \text{sen } a + \text{sen } b = \text{sen } a + \text{sen}(60 - a) \rightarrow \\ &\rightarrow \text{sen } a + \text{sen } 60 \cdot \cos a - \text{sen } a \cdot \cos 60 = \text{sen } a + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos a - \frac{1}{2} \text{sen } a \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos a + \frac{1}{2} \text{sen } a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } a + b = 60 &\rightarrow b = 60 - a \rightarrow \cos a + \cos b = \cos a + \cos(60 - a) \rightarrow \\ &\rightarrow \cos a + \cos 60 \cdot \cos a + \text{sen } a \cdot \text{sen } 60 = \cos a + \frac{1}{2} \cdot \cos a + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen } a \\ &= \frac{3}{2} \cdot \cos a + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen } a \end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos a + \frac{1}{2} \text{sen } a}_{\text{sen } a + \text{sen } b} < \underbrace{\frac{3}{2} \cdot \cos a + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen } a}_{\cos a + \cos b} \rightarrow \text{sen } a + \text{sen } b < \cos a + \cos b$$



**56. ¿Existe algún triángulo con los siguientes datos?  $C = 135^\circ$ ,  $b = 3\sqrt{2}$  cm. y  $c = 3$  cm.**

**VER VIDEO** <https://youtu.be/Dn2HkI4GCpI>

No pues al lado  $b > c$  se le debe oponer un ángulo  $B > C$ . El triángulo tendría dos ángulos obtusos, imposible.

**57. Demostrar:**

$$\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(\sin 2a + 1)$$

**VER VIDEO** <https://youtu.be/6lcDyIG2pc0>

$$\begin{aligned} & \left(\sin a \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos a \cdot \sin \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\cos a \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin a \cdot \sin \frac{\pi}{4}\right) = \\ & = \left(\sin a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\cos a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underbrace{\left(\cos a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}_{\text{binomio al cuadrado}} = \\ & = \frac{1}{2} \cos^2 a + \cos a \cdot \sin a + \frac{1}{2} \sin^2 a = \frac{1}{2} \left( \underbrace{2 \cos a \cdot \sin a}_{\sin 2a} + \underbrace{\cos^2 a + \sin^2 a}_1 \right) \\ & = \frac{1}{2} (\sin 2a + 1) \end{aligned}$$

**58. Si A, B y C son los ángulos de un triángulo, demostrar que la suma de sus tangentes coincide con el producto de estas.  $\text{TagA} + \text{TagB} + \text{TagC} = \text{TagA} \cdot \text{TagB} \cdot \text{TagC}$**

**VER VIDEO** <https://youtu.be/wSm9apF-rSc>

Si A, B y C son los ángulos de un triángulo suman  $180^\circ$ .

$$A + B + C = 180 \rightarrow A + B = 180 - C \rightarrow \text{Tag}(A + B) = \text{Tag}(180 - C) \rightarrow$$

$$\frac{\text{TagA} + \text{TagB}}{1 - \text{TagA} \cdot \text{TagB}} = \frac{\overbrace{\text{Tag}180}^0 - \text{TagC}}{1 + \overbrace{\text{Tag}180}^0 \cdot \text{TagC}} \rightarrow \frac{\text{TagA} + \text{TagB}}{1 - \text{TagA} \cdot \text{TagB}} = -\text{TagC} \rightarrow$$

$$\text{TagA} + \text{TagB} = -\text{TagC} \cdot (1 - \text{TagA} \cdot \text{TagB}) \rightarrow$$

$$\text{TagA} + \text{TagB} = -\text{TagC} + \text{TagA} \cdot \text{TagB} \cdot \text{TagC}$$

$$\text{TagA} + \text{TagB} + \text{TagC} = \text{TagA} \cdot \text{TagB} \cdot \text{TagC}$$

**59. Demostrar:**

$$\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{1}{\cos 2x} + \tan 2x$$

**VER VIDEO** <https://youtu.be/EtDzKhbW8qQ>

**60. Demostrar:**

$$\frac{2\sin x - \sin 2x}{\sin 2x + \sin x} = \frac{(1 - \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

**VER VIDEO** <https://youtu.be/kFK9k7Y1zZ8>

## 4. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.

### ECUACIONES BÁSICAS.

VER VIDEO [https://youtu.be/5s\\_-0Soi3HM](https://youtu.be/5s_-0Soi3HM)

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ k; \text{ (calculadora: shift sen } \frac{1}{2}) \\ x_2 = 180 - x_1 = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\text{cos } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 135^\circ + 360^\circ k; \text{ (calculadora: shift cos } -\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ x_2 = 360^\circ - x_1 = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\text{tan } x = \sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 60^\circ + 360^\circ k; \text{ (calculadora: shift tan } \sqrt{3}) \\ x_2 = 180^\circ + x_1 = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\text{sen } 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 60^\circ + 360^\circ k; \text{ (calculadora: shift sen } \frac{\sqrt{3}}{2}) \\ \text{pasamos el 2 al otro miembro despues de añadir } 360^\circ k \\ x_1 = 30^\circ + 180^\circ k \\ 2x_2 = 180^\circ - x_1 = 120^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 60^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

61. Resolver  $\text{sen}^2 2x - \text{cos}^2 x = 0$

VER VÍDEO <https://youtu.be/sSz7rP6E7A8>

62. Resolver:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \tan x = 1$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/oP9aYaRyLoY>

63. Resolver:

$$\text{sen } x - \text{sen } \frac{x}{2} = 0$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/sT77WvdvOil>

64. Resolver:

$$\text{sen } x \cdot \text{cos } x = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/oMSpXdqQOeY>

65. Resolver:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2}\text{sen } x = 0$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/i9B59hOhNEs>

66. Resolver:

$$\cos \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 0$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/m35MohGphwM>

**67. Resolver la ecuación  $\tan x(4 \cdot \cos^2 x - 3) = 0$**

VER VÍDEO <https://youtu.be/MvNZMijqpfS>

**68. Resolver:  $\operatorname{sen} 2x \cdot \cos x = 6 \cdot \operatorname{sen}^3 x - 4 \operatorname{sen} x$**

VER VÍDEO <https://youtu.be/q3sOJS9Zv7Y>

**69. Resolver la ecuación:  $2 \cdot \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$**

VER VIDEO <https://youtu.be/hT62govkClw>

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2.2}$$

$$= \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 60^\circ + 360^\circ k; & (\text{calculadora: shift } \cos \frac{1}{2}) \\ x_2 = 360 - x_1 = 300^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \cos x = -1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 180^\circ + 360^\circ k; & (\text{calculadora: shift } \cos - 1) \\ x_2 = 360 - x_1 = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

**70. Resolver la ecuación:  $\tan^2 x - \tan x = 0$**

VER VIDEO <https://youtu.be/Xo8g8B4E7Ew>

$$\tan x \cdot (\tan x - 1) = 0 \begin{cases} \tan x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ k; & (\text{calculadora: shift } \tan 0) \\ x_2 = 180^\circ + x_1 = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \tan x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45^\circ + 360^\circ k; & (\text{calculadora: shift } \tan 1) \\ x_2 = 180^\circ + x_1 = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

**71. Resolver la ecuación:  $4 \cdot \cos 2x + 3 \cdot \cos x = 1$**

VER VIDEO <https://youtu.be/IA8jHi2IMV8>

$$4 \cdot (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + 3 \cdot \cos x = 1 \quad \overset{\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x}{\rightsquigarrow} \quad 4 \cdot [\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)] + 3 \cdot \cos x = 1;$$

$$8 \cos^2 x + 3 \cdot \cos x - 5 = 0; \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{16} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{5}{8} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 51'32^\circ + 360^\circ k; \\ x_2 = 360 - x_1 = 308'68^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \cos x = -1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 180^\circ + 360^\circ k; \\ x_2 = 360 - x_1 = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

**72. Resolver la ecuación:  $\tan x + \cotan x = 5$**

VER VIDEO <https://youtu.be/Ny2Iv5NXu90>

$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = 5 \quad \overset{\text{quitando denominadores}}{\Leftrightarrow} \quad \tan^2 x + 1 = 5 \cdot \tan x; \tan^2 x - 5 \cdot \tan x + 1 = 0;$$

$$\tan x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4}}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{5 + \sqrt{25 - 4}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 78'21^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 180^\circ + x_1 = 258'21^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \tan x = \frac{5 - \sqrt{25 - 4}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 11'79^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 180^\circ + x_1 = 191'79^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

73. Resolver la ecuación:

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} - \operatorname{cos} x = 0$$

$$\pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} x}{2}} - \operatorname{cos} x = 0; \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} x}{2}} = \operatorname{cos} x \quad \overset{\text{elevando al cuadrado}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1 - \operatorname{cos} x}{2} = \operatorname{cos}^2 x;$$

$$1 - \operatorname{cos} x = 2 \cdot \operatorname{cos}^2 x; 2 \cdot \operatorname{cos}^2 x + \operatorname{cos} x - 1 = 0; \operatorname{cos} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \operatorname{cos} x = \frac{1}{2} \begin{cases} x_1 = 60^\circ + 360^\circ k; \\ x_2 = 360^\circ - x_1 = 300^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \operatorname{cos} x = -1 \begin{cases} x_1 = 180^\circ + 360^\circ k; \text{ No válida. (sustituye en la ecuación).} \\ x_2 = 360 - x_1 = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

74. Resolver la ecuación:  $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x$

VER VÍDEO <https://youtu.be/e6dWU1NPwPY>

Aplicando la fórmula de transformación de suma en producto:

$$2 \cdot \operatorname{sen} \frac{3x + x}{2} \cdot \operatorname{cos} \frac{3x - x}{2} = \operatorname{sen} 2x; 2 \cdot \operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{cos} x = \operatorname{sen} 2x; 2 \cdot \operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{cos} x - \operatorname{sen} 2x = 0;$$

$$\operatorname{sen} 2x \cdot (2 \cdot \operatorname{cos} x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} 2x = 0 \begin{cases} 2x = 0^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 180^\circ k \\ 2x = 180^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 90^\circ + 180^\circ k \end{cases} \\ 2 \cdot \operatorname{cos} x - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{cos} x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ + 360^\circ k \\ x = 300^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

75. Resolver la ecuación:  $\operatorname{cos}^4 x - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$

VER VÍDEO <https://youtu.be/XWaL8tP7Qbl>

$$\begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

**76. Resolver la ecuación:  $2.\tan x - 3.\cotan x - 1 = 0$** 

$$2.\tan x - 3.\frac{1}{\tan x} - 1 = 0; 2.\tan^2 x - 3 - \tan x = 0; 2.\tan^2 x - \tan x - 3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{3}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 56'31^\circ + 360k \\ x_2 = 180 + x_1 = 236'31^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \tan x = -1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 135^\circ + 360k \\ x_2 = 180 + x_1 = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

**77. Resolver la ecuación:  $\text{sen} x + \sqrt{3}.\text{cos} x = 2$** 

$$\sqrt{1-\text{cos}^2 x} + \sqrt{3}\text{cos} x = 2; \sqrt{1-\text{cos}^2 x} + \sqrt{3}\text{cos} x = 2; \sqrt{1-\text{cos}^2 x} = 2 - \sqrt{3}\text{cos} x \quad \begin{matrix} \text{elevo al} \\ \text{cuadrado} \end{matrix} \rightarrow$$

$$1 - \text{cos}^2 x = 4 - 4\sqrt{3}\text{cos} x + 3\text{cos}^2 x; 4\text{cos}^2 x - 4\sqrt{3}\text{cos} x + 3 = 0; \text{cos} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 360 - 30 = 330^\circ + 360^\circ k. \text{ No válida.} \end{cases}$$

**78. Resolver la ecuación:  $4.\text{sen} \frac{x}{2} + 2.\text{cos} x = 3$** 

$$\pm 4.\sqrt{\frac{1-\text{cos} x}{2}} + 2.\text{cos} x = 3; \pm 4.\sqrt{\frac{1-\text{cos} x}{2}} = 3 - 2.\text{cos} x \quad \begin{matrix} \text{elevo a 2} \\ \rightarrow \end{matrix}$$

$$\rightarrow 16.\frac{1-\text{cos} x}{2} = 9 - 12\text{cos} x + 4.\text{cos}^2 x; 8 - 8\text{cos} x = 9 - 12\text{cos} x + 4.\text{cos}^2 x;$$

$$4.\text{cos}^2 x - 4.\text{cos} x + 1 = 0; \text{cos} x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ + 360^\circ k \\ x = 360 - 60 = 300^\circ + 360^\circ k. \end{cases}$$

**79. Resolver la ecuación:  $\text{cos} 2x - \text{sen}^2 x - 1 = 0$** 

$$\begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

**80. Resolver la ecuación:  $\tan \frac{x}{2} + \text{cos} x = 1$**

22

$$\pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = 1 - \cos x \quad \xrightarrow{\text{elevando al cuadrado}} \quad \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 1 - 2 \cdot \cos x + \cos^2 x;$$

$$1 - \cos x = 1 - 2 \cdot \cos x + \cos^2 x + \cos x - 2 \cdot \cos^2 x + \cos^3 x; \cos^3 x - \cos^2 x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos^2 x \cdot (\cos x - 1)$$

$$= 0 \left\{ \begin{array}{l} \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 360 - 90 = 270^\circ + 360^\circ k. \text{ No válida.} \end{cases} \\ \cos x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 360 - 0 = 360^\circ + 360^\circ k. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\text{81. Resolver la ecuación: } \sqrt{2} \cdot \cos \frac{x}{2} - \cos x = 1$$

$$\begin{cases} x_1 = 90^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\text{82. Resolver la ecuación: } 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x - 6 \cdot \operatorname{sen}^3 x = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 30^\circ + 360^\circ k \\ x_3 = 150^\circ + 360^\circ k \\ x_4 = 180^\circ + 360^\circ k \\ x_5 = 210^\circ + 360^\circ k \\ x_6 = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\text{83. Resolver la ecuación: } 4 \cdot \cos 2x = 1 - 3 \cdot \cos x$$

$$\begin{cases} 51'32^\circ + 360^\circ k \\ 308'68^\circ + 360^\circ k \\ 180^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\text{84. Resolver la ecuación: } \cos^3 x - 3 \cos x = 3 \cos x \operatorname{sen} x$$

$$\cos^3 x - 3 \cdot \cos x - 3 \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} x = 0 \quad \xrightarrow{\text{factor común } \cos x} \quad \cos x \cdot (\cos^2 x - 3 - 3 \cdot \operatorname{sen} x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos x = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 90^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 360 - 90 = 270^\circ + 360^\circ k. \text{ No válida.} \end{array} \right. \\ \cos^2 x - 3 - 3 \cdot \operatorname{sen} x = 0; 1 - \operatorname{sen}^2 x - 3 \cdot \operatorname{sen} x - 3 = 0; \operatorname{sen}^2 x + 3 \cdot \operatorname{sen} x + 2 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} x = -1 \rightarrow x = 270^\circ + 360^\circ k; \text{ esta sol. ya la teníamos.} \\ \operatorname{sen} x = -2 \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\mathbf{85. Resolver la ecuación: \operatorname{sen} x - 2 \cdot \cos 2x = \frac{-1}{2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 30^\circ + 360^\circ k \\ 150^\circ + 360^\circ k \\ 311'41^\circ + 360^\circ k \\ 228'59^\circ + 360^\circ k \end{array} \right.$$

$$\mathbf{86. Resolver la ecuación: 2 \cdot \tan x \cdot \sec x - \tan x = 0}$$

$$\tan x \cdot (2 \cdot \sec x - 1) = 0 \left\{ \begin{array}{l} \tan x = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0^\circ + 360^\circ k \\ x = 180^\circ + 360^\circ k \end{array} \right. \\ \sec x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = 2; \text{ no tiene solución.} \end{array} \right.$$

## 5. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

$$\mathbf{87. Representar la función } y = \operatorname{sen} 2x \text{ en el intervalo } [-\pi, \pi]$$

VER VÍDEO [https://youtu.be/\\_fBxNnQjJ08](https://youtu.be/_fBxNnQjJ08)

$$\mathbf{88. Representar la función } y = \cos(x/2) \text{ en el intervalo } [-\pi, \pi]$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/qIhwV0ugsn4>

$$\mathbf{89. Representa la función } y = 2 \cdot \tan x \text{ en el intervalo } [0, 2\pi]$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/HHUPv2yFli8>