SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

TRIGONOMETRÍA.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS. TEOREMAS DEL SENO Y DEL COSENO. DEMOSTRAR Y SIMPLIFICAR EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.

1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

Ecuación fundamental

$$\mathbf{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha \quad \Big| \quad \text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \Big| \quad 1 + \text{tag}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \Big| \quad 1 + \text{cotag}^2\alpha = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha}$$

1. a. Representa un ángulo del tercer cuadrante cuyo seno sea $\frac{-3}{4}$.
b. Representa un ángulo del segundo cuadrante cuyo coseno sea – 0,8.
c. Representa un ángulo del primer cuadrante cuya tangente valga 2.
VER VÍDEO https://youtu.be/eI9V1vq-_P4

2.

a. Si $\text{sen}\alpha = \frac{1}{2}$ y $\alpha \in II$; hallar $\cos\alpha$ y $\text{tag}\alpha$.

b. Si $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ y $\alpha \in III$; hallar $\text{sen}\alpha$ y $\text{tag}\alpha$.

c. Si $\text{tag}\alpha = \sqrt{3}$ y $\alpha \in I$; hallar $\cos\alpha$ y $\text{sen}\alpha$.

VER VÍDEO https://youtu.be/LXx7ftcw4jM

3. Calcular las razones trigonométricas de x sabiendo que senx = ½. x ∈ II.

$\text{sen}^2x + \cos^2x = 1 \rightarrow 1/4 + \cos^2x = 1 \rightarrow \cos^2x = 3/4 \rightarrow \cos x = -\sqrt{\frac{3}{4}}$; negativo pues en el segundo cuadrante el cos es negativo.

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

4. Calcular las razones trigonométricas de x sabiendo que cosx = $\frac{\sqrt{3}}{2}$. x ∈ IV.

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x + 3/4 = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1/4 \rightarrow \operatorname{sen} x = -1/2$; negativo pues en el cuarto cuadrante el sen es negativo.

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

5. Calcular las razones trigonométricas de x sabiendo que tanx = 1. x ∈ III.

$$1 + \operatorname{tag}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow 1 + 1^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \cdot \tan x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

6. Sabiendo que sen 15º= 0,26, calcular:

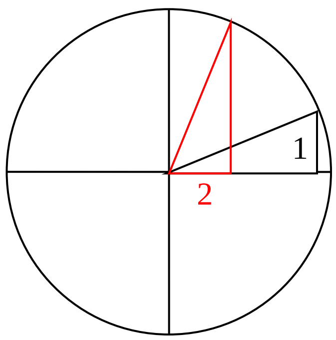
- **a. cos 75º.**
- **b. sen 105º.**
- **c. tan 165º.**
- **d. sen 195º**
- **e. cos 255º**
- **f. tan 285º**
- **g. sen 345º**

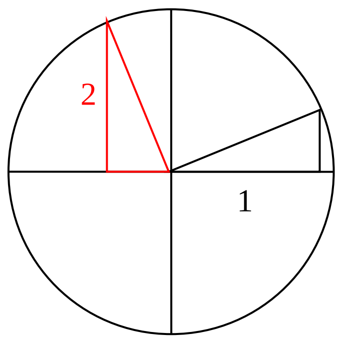
$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow 0{,}26^2 + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 0{,}93 \rightarrow \cos x = 0{,}97$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{0{,}26}{0{,}97} = 0{,}27$$

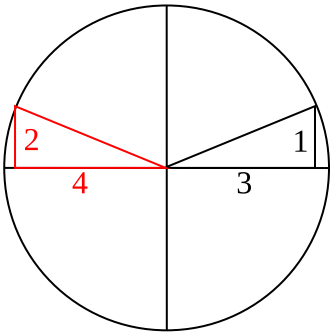
a. $\underbrace{\cos 75°}_{2} = \underbrace{\operatorname{sen} 15°}_{1} = 0{,}26$

b. $\underbrace{\operatorname{sen} 105°}_{2} = \underbrace{\cos 15°}_{1} = 0{,}97$

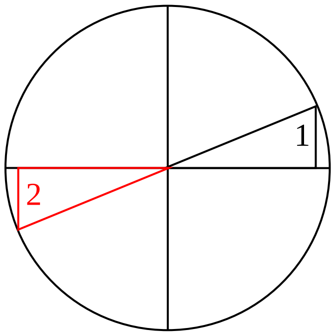




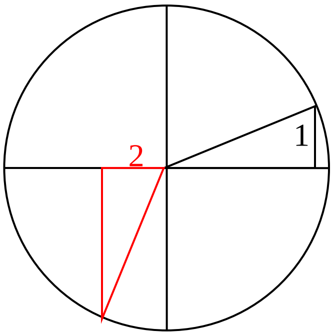
c. $\tan 165° = \dfrac{\overbrace{\text{sen}165°}^{2}}{\underbrace{\cos 165°}_{4}} = \dfrac{\overbrace{\text{sen}15°}^{1}}{\underbrace{-\cos 15°}_{3}} =$
$= -0{,}27$



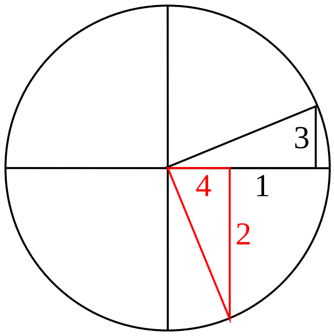
d. $\underbrace{\text{sen}195°}_{2} = \underbrace{-\text{sen}15°}_{1} = -0{,}26$



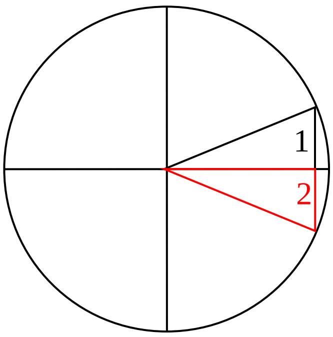
e. $\underbrace{\cos 255°}_{2} = \underbrace{-\text{sen}15°}_{1} = -0{,}26$



f. $\tan 285° = \dfrac{\overbrace{\text{sen}285°}^{2}}{\underbrace{\cos 285°}_{4}} = \dfrac{\overbrace{-\cos 15}^{1}}{\underbrace{\text{sen}15}_{3}} = -3{,}7$



g. $\underbrace{\text{sen}345°}_{2} = \underbrace{-\text{sen}15°}_{1} = -0{,}26$



7. Sabiendo que senx = 0'8 y que x está en el II cuadrante, calcular:

- **a. cosx**
- **b. tanx**
- **c. sen(90 + x)**
- **d. cos(180 – x)**
- **e. tan(270 + x)**

a. $\text{sen}^2\text{x} + \cos^2\text{x} = 1 \to 0{,}8^2 + \cos^2\text{x} = 1 \to \cos^2\text{x} = 0{,}36 \to \cos\text{x} = -0{,}6$; negativo pues en el segundo cuadrante el cos es negativo.

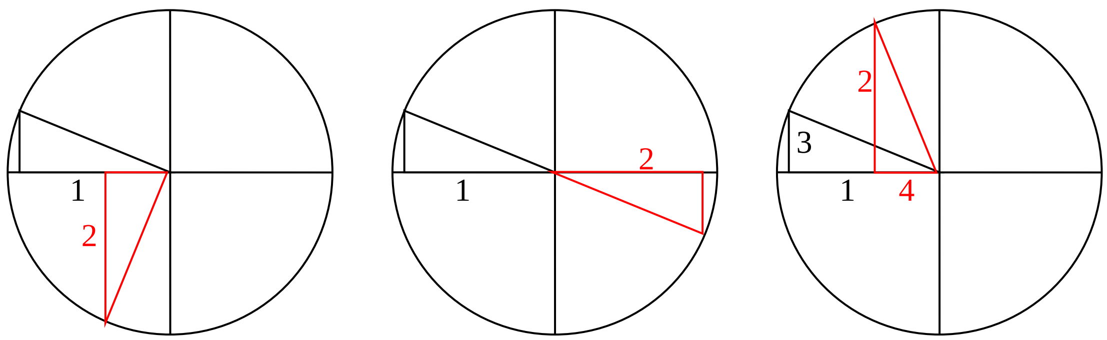
b. $\tan\text{x} = \frac{\text{senx}}{\cos\text{x}} = \frac{0{,}8}{-0{,}6} = \frac{-4}{3}$

c. $\overbrace{\text{sen}(90+\text{x})}^{2} = \overbrace{\cos\text{x}}^{1} = -0{,}6$

d. $\overbrace{\cos(180-\text{x})}^{2} = -\overbrace{\cos\text{x}}^{1} = 0{,}6$

e. $\tan(270+\text{x}) = \frac{\overbrace{\text{sen}(270+\text{x})}^{2}}{\underbrace{\cos(270+\text{x})}_{4}} = \frac{-\overbrace{\cos\text{x}}^{1}}{-\underbrace{\text{senx}}_{3}} = \frac{-3}{4}$

c | d | e



8. Si tan 2x =$\frac{1}{2}$, calcular x, tan x y tan 4x
VER VIDEO https://youtu.be/HlohAlqX9ZQ

$$\tan 2x = \frac{1}{2} \to \begin{cases} 2x = 26'57º \to x = 13'28º \\ 2x = 206'57º \to x = 103'28º \end{cases}$$

$$\tan 2\text{x} = \frac{1}{2} \to \frac{2.\tan\text{x}}{1-\tan^2\text{x}} = \frac{1}{2} \to 4.\tan\text{x} = 1 - \tan^2\text{x} \to \tan^2\text{x} + 4.\tan\text{x} - 1 = 0$$
$$\to \tan\text{x} = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$\tan 4\text{x} = \frac{2.\tan 2\text{x}}{1-\tan^2 2\text{x}} = \frac{2.\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$$

9. Si sen x = 0'8 y x ∈ II, calcular:
a) cos x y tan x.
b) sen 2x
c) cos $\frac{x}{2}$
d) sen (π + x)
VER VIDEO https://youtu.be/SdBMdB-PxjY

a) Sustituyendo sen x = 0'8 en la ecuación sen²x + cos²x = 1→ 0'64 + cos²x = 1→

cos x = ± 0'6. Como el ángulo x se encuentra en el segundo cuadrante tomaremos cos x= – 0'6.

$\tan x = \frac{\text{sen x}}{\cos x} = \frac{0'8}{-0'6} = -\frac{4}{3}$

b) sen 2x = 2.sen x.cos x = 2.0'8.(– 0'6) = – 0'96

$$\text{c) } \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1-0'6}{2}} = \sqrt{0'2}$$

Debemos elegir el signo. X ∈ II ⟶ 90 ≤ x ≤ 180 ⟶ 45 ≤ x/2 ≤ 90 ⟶ x/2 ∈ I, signo +

$$\text{d) } \text{sen}\,(\pi + x) = \underbrace{\text{sen}\,\pi}_{0}.\cos x + \text{sen}\,x.\underbrace{\cos\pi}_{-1} = -\text{sen}\,x = -0'8$$

10. Si tan x = 2 y x ∈ I, calcular:

- **a) sen x y cos x.**
- **b) tan 2x**
- **c) cotan (x – π)**
- **d) cos $\frac{x}{2}$**

VER VIDEO https://youtu.be/xTGR4_0p3iQ

$$\text{Si}\tan x = 2 \to \frac{\text{sen x}}{\cos x} = 2 \to \text{sen x} = 2.\cos x \to (2.\cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \to$$

$$5.\cos^2 x = 1 \to \cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5} \overset{\substack{x\in I\\ \cos x>0}}{\Rightarrow} \cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

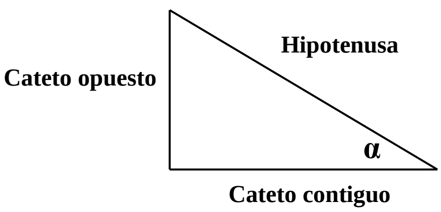
$$\text{sen x} = 2.\cos x = 2.\frac{\sqrt{5}}{5}$$

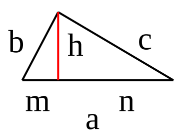
2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS.

$$\text{sen}\alpha = \frac{\textbf{Cateto opuesto}}{\textbf{Hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\textbf{Cateto contiguo}}{\textbf{Hipotenusa}}$$

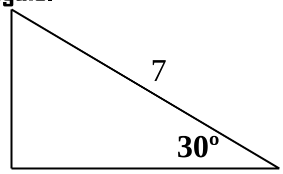
$$\text{tag}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\textbf{Cateto opuesto}}{\textbf{Cateto contiguo}}$$

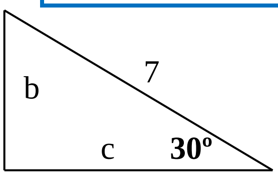


Teorema del seno. $\frac{a}{\text{senA}} = \frac{b}{\text{senB}} = \frac{c}{\text{senC}}$	**Teorema del coseno.** $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C$	 **Triángulo rectángulo**	**T. de Pitágoras** $a^2 = b^2 + c^2$ $b^2 = m^2 + h^2$ $c^2 = n^2 + h^2$ **T.del cateto.** $b^2 = m.a$ $c^2 = n.a$ **T. de la altura.** $h^2 = m.n$

a. Triángulos rectángulos.

11. Hallar los catetos del siguiente triángulo.

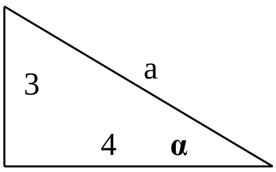




$$\text{sen}30 = \frac{b}{7} \to b = 7.\text{sen}30 = \mathbf{3'5}$$

$$\cos 30 = \frac{c}{7} \to c = 7.\cos 30 = \mathbf{6'06}$$

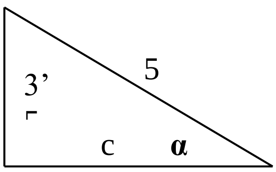
12. Resolver un triángulo rectángulo de cateto 3 y 4 cm.



$$\tan\alpha = \frac{3}{4} \to \alpha = \text{shift}\tan\frac{3}{4} = \mathbf{36'87º}$$

$$\text{Pitágoras: } a = \sqrt{b^2 + c^2} = \mathbf{5\ cm}.$$

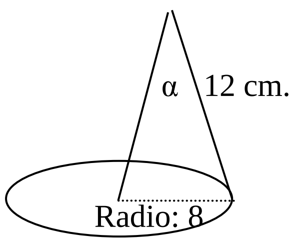
13. Una escalera de 5 m. se apoya en la pared a 3'5 m. de altura. ¿A qué distancia de la pared se apoya?¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo?

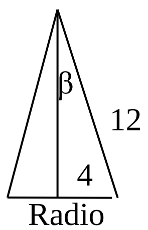


$$\text{sen}\alpha = \frac{3'5}{5} \to \alpha = \text{shift sen}\frac{3'5}{5} = \mathbf{44'43º}$$

$$\text{Pitágoras: } c = \sqrt{a^2 - b^2} = \mathbf{3'57\ cm}.$$

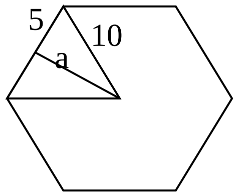
14. Las patas de un compás miden 12 cm. ¿Qué ángulo forman si dibujamos una circunferencia de 16 cm. de diámetro?





$$\text{sen}\beta = \frac{4}{12} \to \beta = 19'47º$$
$$\alpha = 2\beta = \mathbf{38'94º}$$

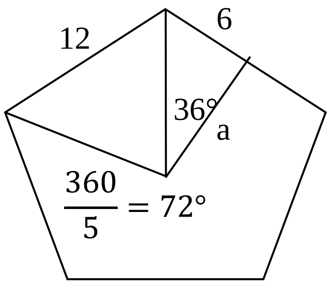
15. Calcular el área de un hexágono regular de 10 cm. de lado.



$$\text{Pitágoras: } a = \sqrt{10^2 - 5^2} = \mathbf{8'66\ cm}.$$

$$\text{área} = \frac{\text{perimetro. apotema}}{2} = \frac{6.10.8'66}{2} = \mathbf{259'8cm^2}.$$

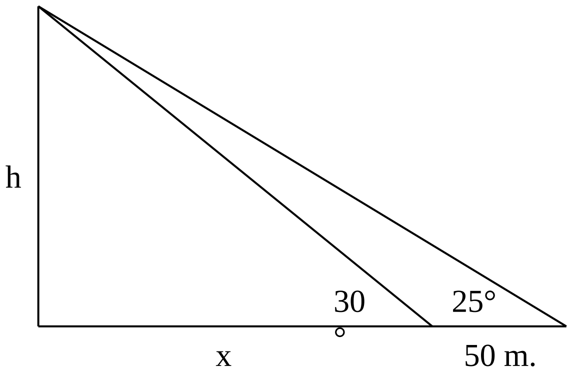
16. Calcular el área de un pentágono regular de 12 cm. de lado.



$$\tan 36 = \frac{6}{a} \to a = \frac{6}{\tan 36} = 8'26\text{cm}.$$

$$\text{área} = \frac{\text{perimetro. apotema}}{2} = \frac{5.12.8'26}{2} = \mathbf{247'8cm^2}.$$

17. Vemos un poste bajo un ángulo de 30º. Si nos alejamos 50 m. la veremos bajo un ángulo de 25º. Calcular la altura del poste.



$$\begin{cases} \tan 30 = \dfrac{h}{x} \to h = x.\tan 30 \\ \tan 25 = \dfrac{h}{50 + x} \to h = (50 + x).\tan 25 \end{cases}$$

x.tan30 = (50 + x).tan25

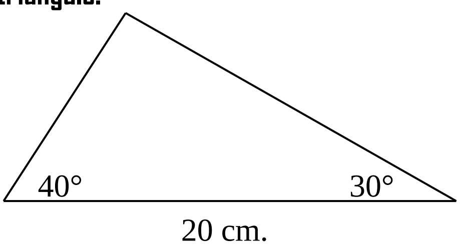
x.tan30 = 50.tan25 + x.tan25

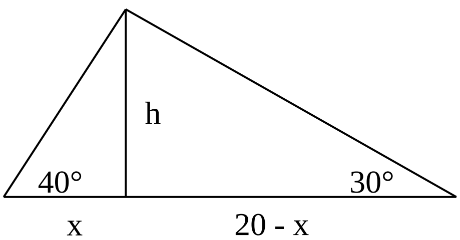
xtan30 – x.tan25 = 50.tan25

x.(tan30 – tan25) = 50.tan25

$$x = \frac{50.\tan 25}{\tan 30 - \tan 25} = \mathbf{210\ m}.$$

18. Hallar el área del siguiente triángulo.





$$\begin{cases} \tan 30 = \dfrac{h}{20 - x} \to h = (20 - x).\tan 30 \\ \tan 40 = \dfrac{h}{x} \to h = x.\tan 40 \end{cases}$$

(20 - x).tan30 = x.tan40

20.tan30 - x.tan30 = x.tan40

20.tan30 = x.tan40 + x.tan30

20.tan30= x.(tan40 + tan30)

$$x = \frac{20.\tan 30}{\tan 40 + \tan 30} = 8'15 \text{ cm.}$$

h = x.tan40 = 6'84 cm.

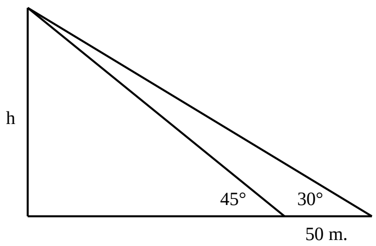
área = **68'4 cm²**.

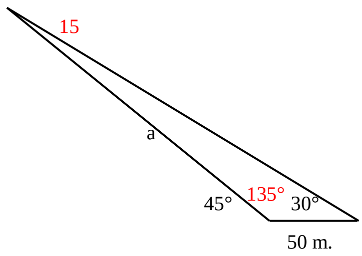
b. Resolución de todo tipo de triángulos.

19. **a. Calcula la altura de una torre sabiendo la visual trazada desde un punto A, situado en el suelo, al punto más alto de la torre, forma con la horizontal un ángulo de 45° y si la misma medida se hace desde un punto B, entonces el ángulo es 30°. A, B y el pie de la torre están alineados y la distancia entre A y B es de 50 m.**

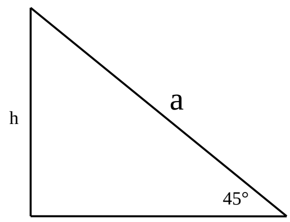
b. Desea saber la altura de un edificio de base inaccesible A. Por esta razón se coloca un teodolito en los puntos C y D. (A, C y D están en el suelo y no alineados). El ángulo de elevación del edificio medido desde C, vale 60° y el ángulo ACD = 45°. Desde D se mide el ánguloADC = 60°. La distancia entre C y D es de 10 m.

VER VÍDEO https://youtu.be/Pv5hpshDQ7U

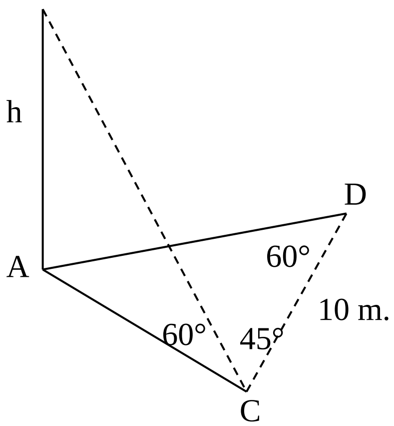


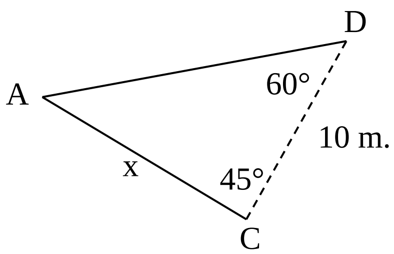


$$\frac{a}{\text{sen } 30} = \frac{50}{\text{sen } 15} \rightarrow$$
$$a = 96{,}59 \text{ m.}$$



$$\frac{96{,}59}{\text{sen } 90} = \frac{h}{\text{sen } 45} \rightarrow$$
$$a = 68{,}3 \text{ m.}$$

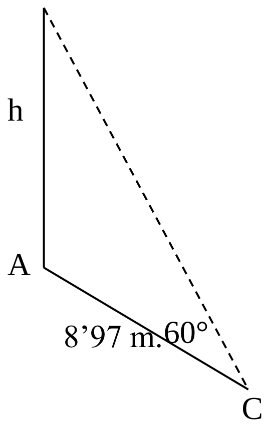




El $\widehat{A}$ vale 180 – C – D = 75°

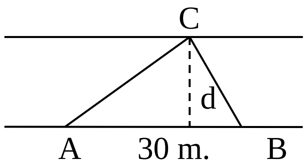
Hallamos x: $\frac{10}{\text{sen}75} = \frac{x}{\text{sen}60}$

$x = 8'97\text{m}$



$$\tan 60 = \frac{h}{8'97}$$
$$h = \mathbf{15'53.\,m}$$

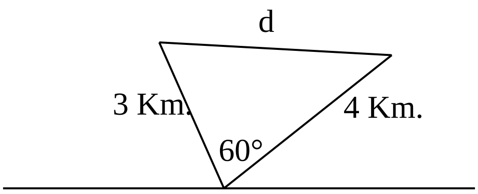
20. Un río tiene dos orillas paralelas. Desde los puntos A y B situados en la misma orilla se observa un punto C en el lado opuesto. Si trazamos una visual de C perpendicular a la orilla opuesta, está entre A y B. Las visuales de A a C y B a C forman con la dirección de la orilla ángulos de 45° y 60° respectivamente. Calcular la anchura del río sabiendo que de A a B hay 30 m.
VER VÍDEO https://youtu.be/sgHVbG81LOo



$$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 75°$$
$$\frac{30}{sen75} = \frac{AC}{sen60}$$
$$AC = 26'9 \text{ cm}$$

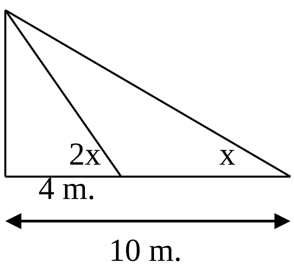
$$sen45 = \frac{d}{26'9}$$
$$d = 19 \text{ m.}$$

21. Dos aviones salen al mismo tiempo del aeropuerto en diferentes direcciones, formando éstas un ángulo de 60°, suponiendo que van en línea recta y han recorrido 3 km y 4 km respectivamente. ¿Qué distancia los separan?



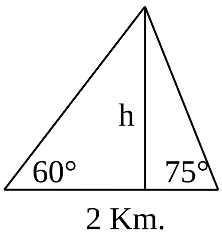
Aplicando el teorema del coseno:
$$d^2 = 3^2 + 4^2 - 2.3.4.\cos 60$$
$$d = 3'6 \text{ Km.}$$

22. A 10 m. del pie de una estatua, se ve bajo un ángulo X y a 4 m bajo de un ángulo 2x calcula la altura de la estatua.
VER VÍDEO https://youtu.be/QORpM-gJdXU



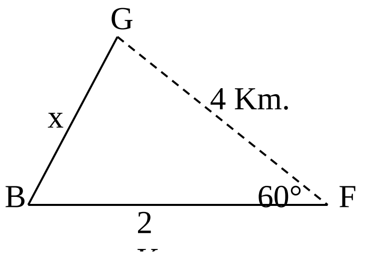
$$\begin{cases} \tan x = \dfrac{h}{10} \\ \tan 2x = \dfrac{h}{4} \rightarrow \dfrac{2.\overbrace{\tan x}^{\frac{h}{10}}}{1 - \tan^2 x} = \dfrac{h}{4} \end{cases} \rightarrow \frac{2.\frac{h}{10}}{1 - \left(\frac{h}{10}\right)^2} = \frac{h}{4} \rightarrow h = 4'47 \text{m.}$$

23. Dos personas distantes entre sí 2 km midieron al mismo tiempo la altura de un avión, que se encuentra en el plano vertical que contiene a las dos personas y se encuentra entre ellas. Los ángulos de elevación del avión medidos por estas personas son 60° y 75° respectivamente. Calcula la altura del avión.



Como el problema 6. H = 2’366 Km.

24. Un barco B se encuentra a 2 km de un faro F y está a 4 km de otro G. Sabiendo que el ángulo BFG es de 60°. Calcula la distancia del barco hasta el Faro G.



Aplicando el teorema del coseno:

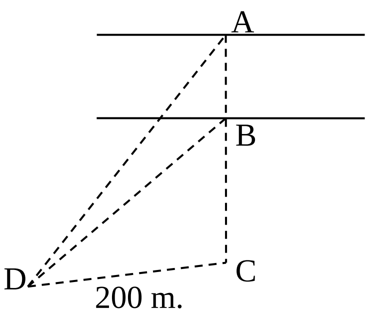
$x^2 = 4^2 + 2^2 - 2.4.2.\cos 60$

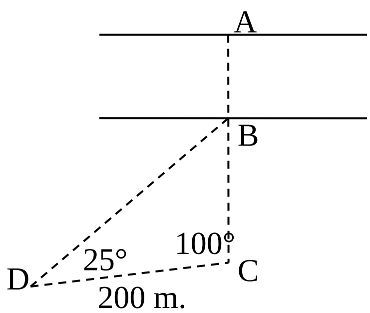
x = **3’464 Km.**

25. Desde un barco se traza una visual al punto más alto de un faro, el ángulo que esta visual forma con la horizontal es de 30°. Cuando el barco ha viajado 200 m. hacia el faro, el ángulo anterior mide 45°. Calcula la distancia mínima del punto más alto del faro a nivel del mar.

Como problema 9. Altura = 273,2 m.

26. Queremos calcular la anchura de un río. Para ello, elegimos un punto C alineado con dos puntos A y B que determinan la anchura del río. A continuación, se determina otro punto D, de modo que el ángulo DCA = 100° (B, C y D están en el mismo lado del río). A continuación, se muestran las siguientes medidas: distancia CD a 200 m. y ángulos BDC = 25° 15' y ADC = 40°.

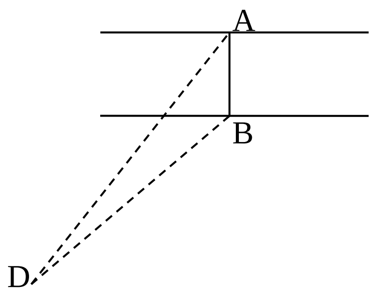




Ángulo DBC = 54° 45’

$$\frac{DB}{\text{sen } 100} = \frac{200}{\text{sen } 54°45'}$$

DB = 241’18



ADB = ADC – BDC;

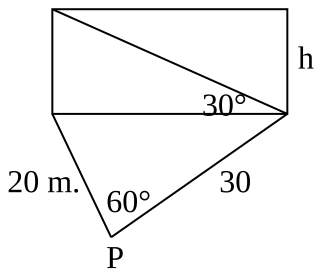
ADB = 14° 45’

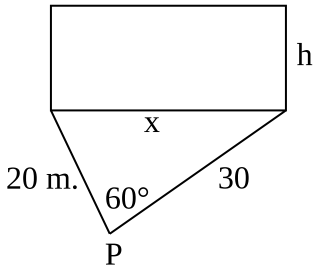
BAD = 180 – ADC – DCA = 40°

$$\frac{AB}{sen\ 14°45'} = \frac{241'18}{sen 40}$$

AB = 95’53 m.

27. La cara visible de un edificio tiene una forma rectangular, la diagonal del rectángulo forma con la base de un ángulo de 30º. Situados en el suelo, en un punto P, el ángulo bajo el cual se ve el edificio es de 60º y las distancias desde el punto P hasta los extremos de la base son de 20 m. y 30 m. respectivamente. Calcula la altura del edificio.

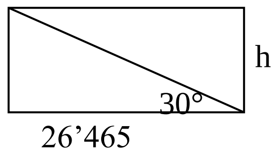




Aplicando el teorema del coseno:

$X^2 = 30^2 + 20^2 - 2.30.20.\cos60$

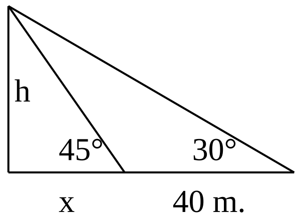
$X = 26'465$ m.



$$\tan30 = \frac{h}{26'465}; H = 15'28 m.$$

28. Desde la orilla de un río se ve un árbol que está en la orilla opuesta, bajo un ángulo de 45° y si retrocedes 40 m. se ve bajo un ángulo de 30°. Calcula la altura del árbol.

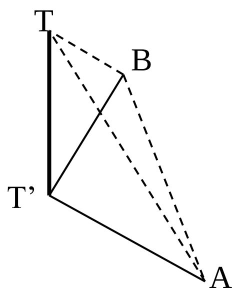
Como problema 9 o como sigue.

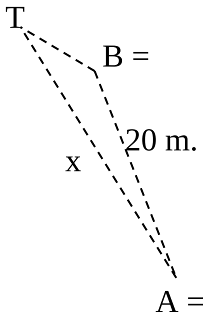


$$\begin{cases} \tan30 = \dfrac{h}{40+x} \rightarrow h = (40+x).\tan30 \\ \tan45 = \dfrac{h}{x} \rightarrow h = x.\tan45 \end{cases}$$

$h = 54'6$ m.

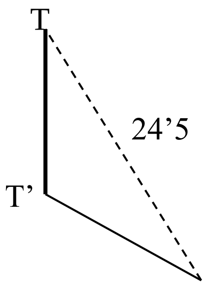
29. Calcula la altura del punto más alto T de una torre de base inaccesible T' si desde los puntos A y B no alineados con T' se miden los siguientes ángulos: T'AT = 30° TAB = 75°; TBA = 60°. La distancia de A a B es de 20 m.





T = 180 – 60 – 75 = 45°

$$\frac{20}{sen45} = \frac{x}{sen60}; X = 24'5 m.$$

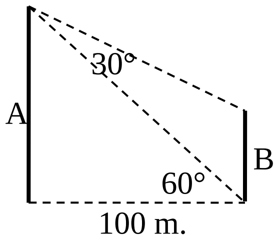


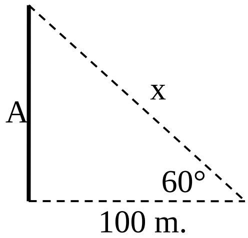
A = 30°

$$sen30 = \frac{h}{24'5}$$

$h = 12'25$m.

30. Desde el punto más alto de un edificio A se ve otro edificio B, de arriba abajo, bajo un ángulo de 30° y desde el pie de B se ve el edificio A, también de arriba a abajo, bajo un ángulo de 60°. Si la distancia entre los dos edificios es de 100 m. Calcula la altura de cada uno de ellos.



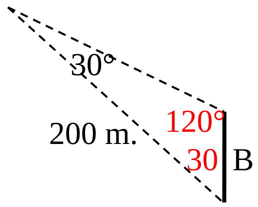


$$\tan 60 = \frac{A}{100}$$

A = 173’2 m.

$$\cos 60 = \frac{100}{x}$$

x = 200 m.



$$\frac{B}{\text{sen}30} = \frac{200}{\text{sen}120}$$

B = 115’5 m.

31. Dos casas A y B están separadas por un río. Si nos situamos en un punto P que está en la misma orilla que A y una distancia de este de 3,6 km. se ve el segmento AB bajo un ángulo de 45°. Si viajamos 6 km. en línea recta hacia A, el segmento mencionado, ahora se ve bajo un ángulo de 60°. Calcula la distancia entre las viviendas A y B. 6 Km.

32. Dos barcos salen del mismo puerto al mismo tiempo con direcciones que forman 45°. Si uno lleva una velocidad de 18 km/h y el otro 20 km/h. Cuánto tiempo tardarán hasta separarse 60 km. 4 h 5 min. 35 s.

33. Dos puntos A y B están separados por un río. Nos situamos en la acera de A en un punto C, que está a 90 m. de A y desde el que se ve el segmento AB bajo un ángulo de 45°. Desde A se ve el segmento BC bajo un ángulo de 75°. Calcula la distancia entre los puntos A y B. 73,48

34. Un cono se encuentra con su base en el suelo, siendo su generatriz de 30 m. y radio de la base de 15 m. A 25 m. del centro de la base y desde el suelo se lanza un proyectil contra el cono, con un ángulo de elevación de 45°, golpeando en un punto que se encuentra en el plano que contiene el punto de lanzamiento y la altura del cono. Calcula la altura del punto de impacto. 23,66 m.

35. Dos puntos A y B, separados por 50 m., equidisten del pie P de una torre de 100 m de altura. Desde P se ve el segmento AB bajo un ángulo de 30°. Calcula la distancia entre el punto más alto de la torre y el punto A. 139 m.

36. Calcula la altura de una torre, sabiendo que desde el suelo y a 20 m de su base el ángulo de elevación es 2xy que a 5 m. el ángulo es x. 14.14 M

37. Un avión vuela a una velocidad constante de 300 km/h siguiendo una trayectoria paralela al suelo. Sea P la posición del avión en un momento determinado, Q la posición en 6 s. y R después de 1 minuto. Y

sea Q la proyección de P sobre el suelo. Se sabe que PQQ = x y PQR = 2x. Calcula la altura del avión.
559 m.

3. DEMOSTRACIONES Y SIMPLIFICAR.

Ecuación fundamental

$$\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$\cos^2\alpha = 1 - \mathrm{sen}^2\alpha$	$\mathrm{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$	$1 + \mathrm{tag}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$	$1 + \mathrm{cotag}^2\alpha = \frac{1}{\mathrm{sen}^2\alpha}$

Fórmulas del ángulo doble

$\mathrm{sen}2\alpha = 2.\mathrm{sen}\alpha.\cos\alpha$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha$	$\mathrm{tag}2\alpha = \frac{2.\mathrm{tag}\alpha}{1 - \mathrm{tag}^2\alpha}$

Fórmulas del ángulo mitad

$\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$	$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$	$\mathrm{tag}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$

Fórmulas de la suma y de la resta

sen (a + b) = sena.cosb + senb.cosa	cos (a + b) = cosa.cosb – sena.senb	$\mathrm{tag}(a + b) = \frac{\mathrm{taga} + \mathrm{tagb}}{1 - \mathrm{taga}.\mathrm{tagb}}$
sen (a – b) = sena.cosb - senb.cosa	cos (a – b) = cosa.cosb + sena.senb	$\mathrm{tag}(a - b) = \frac{\mathrm{taga} - \mathrm{tagb}}{1 + \mathrm{taga}.\mathrm{tagb}}$

Transformación de suma en producto

$\mathrm{senA} + \mathrm{senB} = 2.\mathrm{sen}\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$	$\mathrm{senA} - \mathrm{senB} = 2.\cos\frac{A+B}{2}.\mathrm{sen}\frac{A-B}{2}$
$\cos A + \cos B = 2.\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$	$\cos A - \cos B = -2.\mathrm{sen}\frac{A+B}{2}.\mathrm{sen}\frac{A-B}{2}$

Transformación de producto en suma

$\mathrm{sena}.\cos b = \frac{1}{2}[\mathrm{sen}(a+b) + \mathrm{sen}(a-b)]$	$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$	$\mathrm{sena}.\mathrm{senb} = \frac{-1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

38. Demostrar:

$$\mathrm{cotan}(a + b) = \frac{\mathrm{cotan}\ a.\mathrm{cotan}\ b - 1}{\mathrm{cotan}\ a + \mathrm{cotan}\ b}$$

VER VIDEO https://youtu.be/Xu9234-eoQw

$$\frac{\mathrm{cotan}\ a.\mathrm{cotan}\ b - 1}{\mathrm{cotan}\ a + \mathrm{cotan}\ b} = \frac{\frac{\cos a}{\mathrm{sen}\ a}.\frac{\cos b}{\mathrm{sen}\ b} - 1}{\frac{\cos a}{\mathrm{sen}\ a} + \frac{\cos b}{\mathrm{sen}\ b}} = \frac{\frac{\cos a.\cos b - \mathrm{sen}\ a.\mathrm{sen}\ b}{\cancel{\mathrm{sen}\ a.\mathrm{sen}\ b}}}{\frac{\cos a.\mathrm{sen}\ b + \cos b.\mathrm{sen}\ a}{\cancel{\mathrm{sen}\ a.\mathrm{sen}\ b}}} =$$

$$\frac{\cos(a+b)}{\mathrm{sen}(a+b)} = \mathrm{cotan}(a+b)$$

39. Demostrar: $2.\tan x.\cos^2\frac{x}{2} - \mathrm{sen}\ x = \tan x$

VER VIDEO https://youtu.be/RDQBIPuGOIc

$$2.\tan x.\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}x=2.\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}.\frac{1+\cos x}{2}-\operatorname{sen}x=\frac{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}x.\cos x}{\cos x}-\operatorname{sen}x=$$
$$=\frac{\operatorname{sen}x+\cancel{\operatorname{sen}x.\cos x}-\cancel{\operatorname{sen}x.\cos x}}{\cos x}=\tan x$$

40. Demostrar: cos x.cos(x – y) + sen x.sen(x – y) = cos y
VER VIDEO https://youtu.be/Uq9K-ZBKt6Q

$\cos x.\cos(x-y)+\operatorname{sen}x.\operatorname{sen}(x-y)=\cos x.(\cos x.\cos y+\operatorname{sen}x.\operatorname{sen}y)+\operatorname{sen}x.(\operatorname{sen}x.\cos y-\operatorname{sen}y.\cos x)=\cos^2x.\cos y+\cancel{\cos x.\operatorname{sen}x.\operatorname{sen}y}+\operatorname{sen}^2x.\cos y-\cancel{\operatorname{sen}x.\operatorname{sen}y.\cos x}=\overbrace{(\operatorname{sen}2x+\cos 2x)}^{\text{igual a 1}}.\cos y=\cos y$

41. Demostrar: tan(x + kπ) = tan x
VER VIDEO https://youtu.be/ihXKrL_2JDU

$$\tan(x+k\pi)=\frac{\tan x+\overbrace{\tan k\pi}^{0}}{\underbrace{1-\tan x.\underbrace{\tan k\pi}_{0}}_{0}}=\tan x$$

42. Demostrar: $\cos 2x+\operatorname{sen}2x.\tan x=1$
VER VIDEO https://youtu.be/eGicXq9AzLE

$$\cos 2x+\operatorname{sen}2x.\tan x=\cos^2x-\operatorname{sen}^2x+2.\operatorname{sen}x.\cancel{\cos x}.\frac{\operatorname{sen}x}{\cancel{\cos x}}$$
$$=\cos^2x-\operatorname{sen}^2x+2.\operatorname{sen}^2x=\operatorname{sen}^2x+\cos^2x=1$$

43. Simplificar:
$$\frac{\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}5x}{\cos 3x+\cos 5x}$$
VER VIDEO https://youtu.be/jkxyEhGo738

$$\frac{\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}5x}{\cos 3x+\cos 5x}=\frac{2.\cos\frac{3x+5x}{2}.\operatorname{sen}\frac{3x-5x}{2}}{2.\cos\frac{3x+5x}{2}.\cos\frac{3x-5x}{2}}=\frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)}=\tan(-x)=-\tan x$$

44. Simplificar:
$$\frac{\operatorname{sen}2x}{1+\cos 2x}$$
VER VIDEO https://youtu.be/CX7NZn3IEDw

$$\frac{\operatorname{sen}2x}{1+\cos 2x}=\frac{2.\operatorname{sen}x.\cos x}{1+\cos^2x-\operatorname{sen}^2x}=\frac{2.\operatorname{sen}x.\cos x}{2.\cos^2x}=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=\tan x$$

45. Simplificar:

$$\frac{\mathbf{sen^2x}}{\mathbf{1-\cos x}}.\left(\mathbf{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right)$$

$$\frac{\text{sen}^2x}{1-\cos x}.\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)=\frac{\text{sen}^2x}{1-\cos x}.\left(1+\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)=\frac{\text{sen}^2x}{1-\cos x}.\frac{2}{1+\cos x}$$

$$=\frac{2.\,\text{sen}^2x}{1-\cos^2x}=\frac{2.\,\text{sen}^2x}{\text{sen}^2x}=2$$

46. Desarrollar cos (x + y + z)

VER VIDEO https://youtu.be/WzHgieeckms

cos (x + y + z) = cos [(x + y) + z] = cos (x + y).cos z – sen (x + y).sen z =
= (cos x.cos y – sen x.sen y).cos z – (sen x.cos y + sen y.cos x).sen z =
= cos x.cos y.cos z – sen x.sen y.cos z – sen x.cos y.sen z – cos x.sen y.sen z

47. Si tan 2x =$\frac{1}{2}$, calcular x, tan x y tan 4x

VER VIDEO https://youtu.be/HlohAlqX9ZQ

$$\tan 2x=\frac{1}{2}\rightarrow\begin{cases}2x=26'57º\rightarrow x=13'28º\\ 2x=206'57º\rightarrow x=103'28º\end{cases}$$

$$\tan 2x=\frac{1}{2}\rightarrow\frac{2.\tan x}{1-\tan^2x}=\frac{1}{2}\rightarrow 4.\tan x=1-\tan^2x\rightarrow\tan^2x+4.\tan x-1=0$$

$$\rightarrow\tan x=-2\pm\sqrt{3}$$

$$\tan 4x=\frac{2.\tan 2x}{1-\tan^2 2x}=\frac{2.\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$$

48. Sabiendo que a + b = 60º, ¿cuál de las dos expresiones es mayor? sen a + sen b o cos a + cos b

VER VIDEO https://youtu.be/NgaccBVcj14

Si a + b = 60 → b = 60 – a → sen a + sen b = sen a + sen (60 – a) →

$$\rightarrow\text{sen a}+\text{sen }60.\cos a-\text{sen a}.\cos 60=\text{sen a}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos a-\frac{1}{2}\text{sen a}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos a+\frac{1}{2}\text{sen a}$$

Si a + b = 60 → b = 60 – a → cos a + cos b = cos a + cos (60 – a) →

$$\rightarrow\cos a+\cos 60.\cos a+\text{sen a}.\text{sen }60=\cos a+\frac{1}{2}.\cos a+\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen a}$$

$$=\frac{3}{2}.\cos a+\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen a}$$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos a+\frac{1}{2}\text{sen a}}_{\text{sen a+sen b}}<\underbrace{\frac{3}{2}.\cos a+\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen a}}_{\cos a+\cos b}\rightarrow\text{sen a}+\text{sen b}<\cos a+\cos b$$

49. ¿Existe algún triángulo con los siguientes datos? C = 135°, b = $3\sqrt{2}$ cm. y c = 3 cm.
VER VIDEO https://youtu.be/Dn2HkI4GCpI

No pues al lado b > c se le debe oponer un ángulo B > C. El triángulo tendría dos ángulos obtusos, imposible.

50. Demostrar:

$$\mathbf{sen}\left(\mathbf{a}+\frac{\pi}{4}\right).\mathbf{cos}\left(\mathbf{a}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{sen\ 2a}+\mathbf{1})$$

VER VIDEO https://youtu.be/6lcDyIG2pc0

$$\left(\text{sen a}.\cos\frac{\pi}{4}+\cos\text{a}.\text{sen }\frac{\pi}{4}\right).\left(\cos\text{a}.\cos\frac{\pi}{4}+\text{sen a}.\text{sen }\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\left(\text{sen a}.\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\text{a}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\left(\cos\text{a}.\frac{\sqrt{2}}{2}+\text{sen a}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\underbrace{\left(\cos\text{a}.\frac{\sqrt{2}}{2}+\text{sen a}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}_{\text{binomio al cuadrado}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cos^2\text{a}+\cos\text{a}.\text{sen a}+\frac{1}{2}\text{sen}^2\text{a}=\frac{1}{2}\left(\underbrace{2\cos\text{a}.\text{sen a}}_{\text{sen 2a}}+\underbrace{\cos^2\text{a}+\text{sen}^2\text{a}}_{1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\text{sen 2a}+1)$$

51. Si A, B y C son los ángulos de un triángulo, demostrar que la suma de sus tangentes coincide con el producto de estas. TagA + TagB + TagC = TagA·TagB·TagC
VER VIDEO https://youtu.be/uXiH_SQNF8w

Si A, B y C son los ángulos de un triángulo suman 180°.

$$A+B+C=180\rightarrow A+B=180-C\rightarrow \text{Tag}(A+B)=\text{Tag}(180-C)\rightarrow$$

$$\frac{\text{TagA}+\text{TagB}}{1-\text{TagA}\cdot\text{TagB}}=\frac{\overbrace{\text{Tag180}}^{0}-\text{TagC}}{1+\underbrace{\text{Tag180}}_{0}\cdot\text{TagC}}\rightarrow\frac{\text{TagA}+\text{TagB}}{1-\text{TagA}\cdot\text{TagB}}=-\text{TagC}\rightarrow$$

$$\text{TagA}+\text{TagB}=-\text{TagC}\cdot(1-\text{TagA}\cdot\text{TagB})\rightarrow$$
$$\text{TagA}+\text{TagB}=-\text{TagC}+\text{TagA}\cdot\text{TagB}\cdot\text{TagC}$$
$$\text{TagA}+\text{TagB}+\text{TagC}=\text{TagA}\cdot\text{TagB}\cdot\text{TagC}$$

4. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.

ECUACIONES BÁSICAS.

VER VIDEO https://youtu.be/5s_-OSoi3HM

$$\text{sen x}=\frac{1}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=30°+360°k;\ \left(\text{calculadora: shift sen}\frac{1}{2}\right)\\ x_2=180-x_1=150°+360°k\end{cases}$$

$$\cos\text{x}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=135°+360°k;\ \left(\text{calculadora: shift cos}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ x_2=360°-x_1=225°+360°k\end{cases}$$

$$\tan x = \sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 60° + 360°k; \left(\text{calculadora: shift } \tan\sqrt{3}\right) \\ x_2 = 180° + x_1 = 150° + 360°k \end{cases}$$

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 60° + 360°k; \left(\text{calculadora: shift sen } \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \text{pasamos el 2 al otro miembro despues de añadir } 360°k \\ x_1 = 30° + 180°k \\ 2x_2 = 180° - x_1 = 120° + 360°k \\ x_2 = 60° + 180°k \end{cases}$$

52. Resolver la ecuación: $2.\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$
VER VIDEO https://youtu.be/hT62govkClw

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2.2} = \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 60° + 360°k; \left(\text{calculadora: shift cos } \frac{1}{2}\right) \\ x_2 = 360 - x_1 = 300° + 360°k \end{cases} \\ \cos x = -1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 180° + 360°k; (\text{calculadora: shift cos } -1) \\ \cancel{x_2 = 360° - x_1 = 180° + 360°k} \end{cases} \end{cases}$$

53. Resolver la ecuación: $\tan^2 x - \tan x = 0$
VER VIDEO https://youtu.be/Xo8g8B4E7Ew

$$\tan x.(\tan x - 1) = 0 \begin{cases} \tan x = 0 \begin{cases} x_1 = 0° + 360°k; (\text{calculadora: shift tan0}) \\ x_2 = 180° + x_1 = 180° + 360°k \end{cases} \\ \tan x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45° + 360°k; (\text{calculadora: shift tan1}) \\ x_2 = 180° + x_1 = 225° + 360°k \end{cases} \end{cases}$$

54. Resolver la ecuación: $4.\cos 2x + 3.\cos x = 1$
VER VIDEO https://youtu.be/IA8jHi2IMV8

$$4.(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + 3.\cos x = 1 \overset{\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x}{\rightleftarrows} 4.[\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)] + 3.\cos x = 1;$$

$$8\cos^2 x + 3.\cos x - 5 = 0; \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{16} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{5}{8} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 51'32° + 360°k; \\ x_2 = 360 - x_1 = 308'68° + 360°k \end{cases} \\ \cos x = -1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 180° + 360°k; \\ \cancel{x_2 = 360 - x_1 = 180° + 360°k} \end{cases} \end{cases}$$

55. Resolver la ecuación: $\tan x + \operatorname{cotan} x = 5$
VER VIDEO https://youtu.be/Ny2Iv5NXu90

$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = 5 \overset{\text{quitando denominadores}}{\Rightarrow} \tan^2 x + 1 = 5.\tan x;\ \tan^2 x - 5.\tan x + 1 = 0;$$

$$\tan x = \frac{5 \pm \sqrt{25-4}}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \tan x = \dfrac{5+\sqrt{25-4}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 78'21° + 360°k \\ x_2 = 180° + x_1 = 258'21° + 360°k \end{cases} \\ \\ \tan x = \dfrac{5-\sqrt{25-4}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 11'79° + 360°k \\ x_2 = 180° + x_1 = 191'79° + 360°k \end{cases} \end{cases}$$

56. Resolver la ecuación:

$$\mathbf{sen\frac{x}{2} - cosx = 0}$$

$$\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} - \cos x = 0;\ \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \cos x \overset{\text{elevando al cuadrado}}{\Rightarrow} \frac{1-\cos x}{2} = \cos^2 x;$$

$$1 - \cos x = 2.\cos^2 x;\ 2.\cos^2 x + \cos x - 1 = 0; \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \begin{cases} x_1 = 60° + 360°k; \\ x_2 = 360° - x_1 = 300° + 360°k \end{cases} \\ \\ \cos x = -1 \begin{cases} x_1 = 180° + 360k; \text{No válida. (sustituye en la ecuación).} \\ \cancel{x_2 = 360 - x_1 = 180° + 360k} \end{cases} \end{cases}$$

57. Resolver la ecuación: $\mathbf{sen\,3x + sen\,x = sen\,2x}$

VER VÍDEO https://youtu.be/e6dWU1NPwPY

Aplicando la fórmula de transformación de suma en producto:

$$2.\text{sen}\frac{3x+x}{2}.\cos\frac{3x-x}{2} = \text{sen}2x;\ 2.\text{sen}\,2x.\cos x = \text{sen}2x;\ 2.\text{sen}\,2x.\cos x - \text{sen}2x = 0;$$

$$\text{sen}2x.(2.\cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{sen}2x = 0 \begin{cases} 2x = 0° + 360k \rightarrow x = 180k \\ 2x = 180° + 360k \rightarrow x = 90 + 180k \end{cases} \\ \\ 2.\cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 60° + 360°k \\ x = 300° + 360°k \end{cases} \end{cases}$$

58. Resolver la ecuación: $\mathbf{cos^4x - 2.sen^2x - 1 = 0}$

VER VÍDEO https://youtu.be/XWaL8tP7QbI

$$\begin{cases} x_1 = 0° + 360°k \\ x_2 = 180° + 360°k \end{cases}$$

59. Resolver la ecuación: 2.tan x – 3.cotan x – 1 = 0

$$2.\tan x - 3.\frac{1}{\tan x} - 1 = 0;\ 2.\tan^2 x - 3 - \tan x = 0;\ 2.\tan^2 x - \tan x - 3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \tan x = \dfrac{3}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 56'31^\circ + 360k \\ x_2 = 180 + x_1 = 236'31^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \\ \tan x = -1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 135^\circ + 360k \\ x_2 = 180 + x_1 = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

60. Resolver la ecuación: $\mathbf{senx + \sqrt{3}.cosx = 2}$

$$\overbrace{\text{senx}}^{\sqrt{1-\cos^2 x}} + \sqrt{3}\cos x = 2;\ \sqrt{1-\cos^2 x} + \sqrt{3}\cos x = 2;\ \sqrt{1-\cos^2 x} = 2 - \sqrt{3}\cos x \overset{\text{elevo al cuadrado}}{\rightarrow}$$

$$1 - \cos^2 x = 4 - 4\sqrt{3}\cos x + 3\cos^2 x;\ 4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 3 = 0;\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ \\ x = 360 - 30 = 330^\circ + 360^\circ k\,.\ \text{No válida.} \end{cases}$$

61. Resolver la ecuación: $\mathbf{4.sen\frac{x}{2} + 2.cosx = 3}$

$$\pm 4.\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} + 2.\cos x = 3;\ \pm 4.\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = 3 - 2.\cos x \overset{\text{elevo a 2}}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow 16.\frac{1-\cos x}{2} = 9 - 12\cos x + 4.\cos^2 x;\ 8 - 8\cos x = 9 - 12\cos x + 4.\cos^2 x;$$

$$4.\cos^2 x - 4.\cos x + 1 = 0;\ \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ + 360^\circ k \\ \\ x = 360 - 30 = 300^\circ + 360^\circ k\,. \end{cases}$$

62. Resolver la ecuación: cos 2x – sen^{2}x – 1 = 0

$$\begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

63. Resolver la ecuación: $\mathbf{tan\frac{x}{2} + cosx = 1}$

$$\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = 1-\cos x \underset{}{\overset{\text{elevando al cuadrado}}{\rightarrow}} \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = 1-2.\cos x+\cos^2 x;$$

$$1-\cos x = 1-2.\cos x+\cos^2 x+\cos x-2.\cos^2 x+\cos^3 x;\ \cos^3 x-\cos^2 x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos^2 x.(\cos x-1) = 0 \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° + 360°k \\ x_2 = 360-90 = 270° + 360°k\,.\ \text{No válida}. \end{cases} \\ \cos x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360°k \\ \cancel{x_2 = 360-0 = 360° + 360°k}\,. \end{cases} \end{cases}$$

64. Resolver la ecuación: $\sqrt{2}.\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$

$$\begin{cases} x_1 = 90° + 360°k \\ x_2 = 180° + 360°k \end{cases}$$

65. Resolver la ecuación: $2.\operatorname{sen}x.\cos^2 x - 6.\operatorname{sen}^3 x = 0$

$$\begin{cases} x_1 = 0° + 360°k \\ x_2 = 30° + 360°k \\ x_3 = 150° + 360°k \\ x_4 = 180° + 360°k \\ x_5 = 210° + 360°k \\ x_6 = 330° + 360°k \end{cases}$$

66. Resolver la ecuación: 4.cos 2x = 1 – 3.cos x

$$\begin{cases} 51'32° + 360°k \\ 308'68° + 360°k \\ 180° + 360°k \end{cases}$$

67. Resolver la ecuación: $\cos^3 x - 3\cos x = 3\cos x\,\operatorname{sen}x$

$$\cos^3 x - 3.\cos x - 3.\cos x.\operatorname{sen}x = 0 \overset{\text{factor común } \cos x}{\rightarrow} \cos x.(\cos^2 x - 3 - 3.\operatorname{sen}x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° + 360°k \\ x_2 = 360 - 90 = 270° + 360°k\text{. No válida.} \end{cases} \\ \cos^2 x - 3 - 3.\text{sen}x = 0;\ 1 - \text{sen}^2 x - 3.\text{sen}x - 3 = 0;\ \text{sen}^2 x + 3.\text{sen}x + 2 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} \text{sen}x = -1 \rightarrow x = 270° + 360°k;\text{ esta sol. ya la teníamos.} \\ \text{sen}x = -2 \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases} \end{cases}$$

68. Resolver la ecuación: $\mathbf{senx - 2.cos2x = \frac{-1}{2}}$

$$\begin{cases} 30° + 360°k \\ 150° + 360°k \\ 311'41° + 360°k \\ 228'59° + 360°k \end{cases}$$

69. Resolver la ecuación: 2·tanx·secx – tanx = 0

$$\text{tanx}.(2.\text{secx} - 1) = 0 \begin{cases} \text{tanx} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0° + 360°k \\ x = 180° + 360°k \end{cases} \\ \text{secx} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{cosx} = 2;\text{ no tiene solución.} \end{cases}$$