SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

CÁLCULO DE INTEGRALES.

INTEGRALES INMEDIATAS. INTEGRACIÓN POR PARTES. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES. INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

1. INTEGRALES INMEDIATAS.

VER VÍDEO https://youtu.be/s0JTN6VPO00

TABLA DE INTEGRALES.

$\int k\,dx = kx + c;$	1	
$\int kf\,dx = k\int f\,dx$	2	
$\int (f \pm g)dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx;$	3	
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	4	$\int f'.f^n dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + c$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$	5	$\int \frac{f'}{f} dx = \ln\lvert f\rvert + c$
$\int e^x\,dx = e^x + c$	6	$\int f'.e^f dx = e^f + c$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	7	$\int f'.a^f dx = \frac{a^f}{\ln a} + c$
$\int \operatorname{sen}x\,dx = -\cos x + c$	8	$\int f'.\operatorname{sen}f\,dx = -\cos f + c$
$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen}x + c$	9	$\int f'.\cos f\,dx = \operatorname{sen}f + c$
$\int \tan x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	10	$\int f'.\tan f\,dx = -\ln\lvert\cos f\rvert + c$
$\int \operatorname{cotan}x\,dx = \ln\lvert\operatorname{sen}x\rvert + c$	11	$\int f'.\operatorname{cotan}f\,dx = \ln\lvert\operatorname{sen}f\rvert + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	12	$\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \tan f + c$
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\operatorname{cotan}x + c$	13	$\int \frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f} dx = -\operatorname{cotan}f + c$
$\int \frac{1}{a^2 + b^2x^2} dx = \frac{1}{a.b}.\arctan\frac{bx}{a} + c$	14	$\int \frac{f'}{a^2 + b^2f^2} dx = \frac{1}{a.b}.\arctan\frac{bf}{a} + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} dx = \frac{1}{b}.\operatorname{arcsen}\frac{bx}{a} + c$	15	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2 - b^2f^2}} dx = \frac{1}{b}.\operatorname{arcsen}\frac{bf}{a} + c$

1. Resuelve las siguientes integrales aplicando la fórmula.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$a. \int (x^3 + x^2 - 3x + 1)\, dx$$

VER VIDEO https://youtu.be/HmVlAq3YtYo

$$b. \int (3x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 1)\, dx$$

VER VIDEO https://youtu.be/fNbTFcTdoWA

$$c. \int \frac{\sqrt{2x}}{5}\, dx = \frac{2x\sqrt{2x}}{15} + c$$

VER VIDEO https://youtu.be/1BoP_FGxKe8

$$d. \int \frac{3}{2\sqrt{x}}\, dx = 3\sqrt{x} + c$$

VER VIDEO https://youtu.be/j4z8-na3GUA

$$e. \int \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{5x}}\, dx = \frac{6}{7}\sqrt[6]{\frac{27x^7}{25}} + c$$

VER VIDEO https://youtu.be/Wh0c2jbDA6M

$$f. \int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x}\, dx = \sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt{5x^3}}{9} + c$$

VER VIDEO https://youtu.be/J2_-dwdAAa8

2. Resuelve las siguientes integrales aplicando la fórmula.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$a. \int (x^3 + x^2 - 3x + 1)\, dx$$

$$b. \int (3x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 1)\, dx$$

$$c. \int \sqrt{x}\, dx$$

$$d. \int \sqrt{3x}\, dx$$

$$e. \int \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$f. \int \sqrt{x\sqrt{x}}\, dx$$

$$a. \int (x^3 + x^2 - 3x + 1)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x + c$$

$$b. \int (3x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 1)\, dx = 3\frac{x^5}{5} + 5\frac{x^4}{4} - \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}} + x + c$$

c. $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$

d. $\int \sqrt{3x}\,dx = \int \sqrt{3}\sqrt{x}\,dx = \sqrt{3}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{3}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}x\sqrt{x} + c$

e. $\int \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}dx + \int dx =$

$= \int x^{\frac{1}{2}}dx + x = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + x = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + x + c$

f. $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx = \int \sqrt{x}\sqrt[4]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}\,dx = \int x^{\frac{3}{4}}\,dx = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} = \frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} = \frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}$

$+ c$

3. Resuelve las siguientes integrales aplicando la fórmula.

$$\int f'.f^n dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + c$$

a. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln x}}dx = -2\sqrt{1-\ln x} + c$

VER VIDEO https://youtu.be/26igyAhVcmY

b. $\int (4x-4)\sqrt[5]{x^2-2x+5}\,dx = \frac{5}{3}(x^2-2x+5)\sqrt[5]{x^2-2x+5} + c$

VER VIDEO https://youtu.be/hYz1qBZSCYc

c. $\int \text{sen}3x.\cos^3 3x\,dx = \frac{-1}{12}\cos^4 3x + c$

VER VIDEO https://youtu.be/Lctua11oFeM

d. $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^3}\,dx = \frac{-1}{2(1+e^x)^2} + c$

VER VIDEO https://youtu.be/Z6M1yHk6PVI

e. $\int \sec x.\tan x\,dx = \frac{1}{\cos x} + c$

VER VIDEO https://youtu.be/_I5v1uGezLM

4. Resuelve las siguientes integrales aplicando la fórmula.

$$\int f'.f^n dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + c$$

a. $\int \cos x.\text{sen}^3 x\,dx$

b. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

c. $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+1}\, dx$

d. $\int \frac{1}{x.\ln^4 x} dx$

e. $\int (3x+3).(x^2+2x+7)^5 dx$

---

a. $\int \cos x.\, sen^3 x\, dx = \int \cos x.\, sen^3 x\, dx = \frac{sen^4 x}{4} + c$

b. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \ln^2 x\, dx = \frac{\ln^3 x}{3} + c$

c. $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+1}\, dx = \frac{1}{2}\int 2(x+1)(x^2+2x+1)^{\frac{1}{2}} dx$

$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(x^2+2x+1)\sqrt{x^2+2x+1} + c$

d. $\int \frac{1}{x.\ln^4 x} dx = \int \frac{1}{x}(\ln x)^{-4} dx = \frac{(\ln x)^{-3}}{-3} = \frac{-1}{3}\frac{1}{(\ln x)^3} + c$

e. $\int (3x+3).(x^2+2x+7)^5 dx = 3\int (x+1).(x^2+2x+7)^5 dx =$

$= \frac{3}{2}\int 2(x+1).(x^2+2x+7)^5 dx = \frac{3}{2}\frac{(x^2+2x+7)^6}{6} + c$

---

5. Resuelve las siguientes integrales aplicando las fórmulas.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad \Big| \quad \int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + c$$

a. $\int \frac{3}{x}\, dx = 3.\ln|x| + c$

VER VIDEO https://youtu.be/v9-477VZK9c

b. $\int \frac{2}{1-3x}\, dx = \frac{-2}{3}.\ln|1-3x| + c$

VER VIDEO https://youtu.be/hShYNVGR1FQ

c. $\int \cot an x\, dx = \ln|sen x| + c$

VER VIDEO https://youtu.be/yXnqGFQHDBQ

d. $\int \frac{1}{x.\ln 2x}\, dx = \ln|\ln 2x| + c$

VER VIDEO https://youtu.be/K6tMBTvIiVo

e. $\int \frac{sen x - \frac{1}{x} + e^x}{\cos x + \ln x - e^x}\, dx = -\ln|\cos x + \ln x - e^x| + c$

VER VIDEO https://youtu.be/8fN-VWOGgxk

$$\boldsymbol{f}.\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sen2x.\,cos2x}}\,\mathbf{dx} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(-\mathbf{ln}|\mathbf{cos2x}| + \mathbf{ln}|\mathbf{sen2x}|) + \mathbf{c}$$

VER VIDEO https://youtu.be/ZIOjGeCzu4k

6. Resuelve las siguientes integrales aplicando la fórmula.

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c \qquad \int \frac{f'}{f}dx = \ln|f| + c$$

a. $\int \frac{3}{x}\,dx$

b. $\int \frac{2}{1-3x}\,dx$

c. $\int \tan x\,dx$

d. $\int \frac{1}{x.\ln x}\,dx$

e. $\int \frac{2x^2-2}{x^3-3x}\,dx$

f. $\int \frac{2^x}{1-2^x}\,dx$

g. $\int \frac{1}{\operatorname{sen}x.\cos x}\,dx$

a. $\int \frac{3}{x}\,dx = 3.\ln|x| + c$

b. $\int \frac{2}{1-3x}\,dx = 2\int \frac{1}{1-3x}\,dx = \frac{-2}{3}\int \frac{-3}{1-3x}\,dx = \frac{-2}{3}.\ln|1-3x| + c$

c. $\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\operatorname{sen}x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + c$

d. $\int \frac{1}{x.\ln x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln|\ln x| + c$

e. $\int \frac{2x^2-2}{x^3-3x}\,dx = 2\int \frac{x^2-1}{x^3-3x}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{3x^2-3}{x^3-3x}\,dx = \frac{2}{3}\ln|x^3-3x| + c$

f. $\int \frac{2^x}{1-2^x}\,dx = \frac{-1}{\ln 2}\int \frac{-2^x.\ln 2}{1-2^x}\,dx = \frac{-1}{\ln 2}.\ln|1-2^x| + c$

g. $\int \frac{1}{\operatorname{sen}x.\cos x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2x + \cos^2x}{\operatorname{sen}x.\cos x}\,dx$

$$= \int \left(\frac{\operatorname{sen}^2x}{\operatorname{sen}x.\cos x} + \frac{\cos^2x}{\operatorname{sen}x.\cos x}\right)dx =$$

$$= \int \tan x\,dx + \int \cot x\,dx = -\ln|\cos x| + \ln|\operatorname{sen}x| + c$$

7. Resuelve las siguientes integrales aplicando la fórmula.

$$\int e^x\,dx = e^x + c \qquad \int f'.e^f dx = e^f + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \qquad \int f'.a^f dx = \frac{a^f}{\ln a} + c$$

$a.\ \int (2x-1).e^{x^2-x}dx = e^{x^2-x} + c$

VER VIDEO https://youtu.be/HHyAzUgMJm4

$b.\ \int \frac{3^{\tan x}}{\cos^2 x}dx = \frac{3^{\tan x}}{\ln 3} + c$

VER VIDEO https://youtu.be/mp_NCX3Wa_I

$c.\ \int 3x^3 e^{x^4}dx = \frac{3}{4}e^{x^4} + c$

VER VIDEO https://youtu.be/CdTTD7B-p5w

$d.\ \int \frac{2^x+3^x}{3^x}dx = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}} + x + c$

VER VIDEO https://youtu.be/KxfQMYeXiOw

8. Resuelve las siguientes integrales aplicando la fórmula.

$$\int e^x\,dx = e^x + c \qquad \int f'.e^f dx = e^f + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \qquad \int f'.a^f dx = \frac{a^f}{\ln a} + c$$

a. $\int x^2.e^{x^3}dx$

b. $\int 3^x.2^x dx$

c. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

d. $\int \text{senx}.5^{\cos x}dx$

a. $\int x^2.e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int 3x^2.e^{x^3}dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + c$

b. $\int 3^x.2^x dx = \int 6^x dx = \frac{6^x}{\ln 6} + c$

c. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$

d. $\int \text{senx}.5^{\cos x}dx = -\int -\text{senx}.5^{\cos x}dx = -\frac{5^{\cos x}}{\ln 5} + c$

9. Resuelve las siguientes integrales aplicando la fórmula.

$$\int \mathrm{senx}\,dx = -\cos x + c \qquad \int f'.\,\mathrm{sen}f\,dx = -\cos f + c$$
$$\int \cos x\,dx = \mathrm{senx} + c \qquad \int f'.\cos f\,dx = \mathrm{sen}f + c$$
$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c \qquad \int f'.\tan f\,dx = -\ln|\cos f| + c$$
$$\int \mathrm{cotanx}\,dx = \ln|\mathrm{senx}| + c \qquad \int f'.\,\mathrm{cotan}f\,dx = \ln|\mathrm{sen}f| + c$$

a. $\int (x+1)\mathrm{sen}(x^2+2x+7)dx = \frac{-1}{2}\cos(x^2+2x+7) + c$

VER VIDEO https://youtu.be/-Us_ODWCMPY

b. $\int e^{3x}\cos e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\mathrm{sen}\,e^{3x} + c$

VER VIDEO https://youtu.be/46a0pasFGNs

c. $\int \mathrm{senx}.\tan(\cos x)\,dx = \ln|\cos(\cos x)| + c$

VER VIDEO https://youtu.be/yXr_mY2a06c

d. $\int \frac{\mathrm{cotan}\frac{1}{x}}{x^2}dx = -\ln\left|\mathrm{sen}\frac{1}{x}\right| + c$

VER VIDEO https://youtu.be/kLBmhxJC8VU

---

10. Resuelve las siguientes integrales aplicando la fórmula.

$$\int \mathrm{senx}\,dx = -\cos x + c \qquad \int f'.\,\mathrm{sen}f\,dx = -\cos f + c$$
$$\int \cos x\,dx = \mathrm{senx} + c \qquad \int f'.\cos f\,dx = \mathrm{sen}f + c$$
$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c \qquad \int f'.\tan f\,dx = -\ln|\cos f| + c$$
$$\int \mathrm{cotanx}\,dx = \ln|\mathrm{senx}| + c \qquad \int f'.\,\mathrm{cotan}f\,dx = \ln|\mathrm{sen}f| + c$$

a. $\int \frac{\mathrm{sen}(\ln 2x)}{x}dx$

b. $\int x^2\cos x^3 dx$

c. $\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

d. $\int 2^x \mathrm{cotan}\,2^x dx$

---

a. $\int \frac{\mathrm{sen}(\ln 2x)}{x}dx = \int \frac{1}{x}\mathrm{sen}(\ln 2x)\;dx = -\cos(\ln 2x) + c$

b. $\int x^2\cos x^3 dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\cos x^3 dx = \frac{1}{3}\mathrm{senx}^3 + c$

c. $\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\tan\sqrt{x}\,dx = -2\ln|\cos\sqrt{x}| + c$

d. $\int 2^x \cot an\, 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}\int \ln 2 . 2^x \cot an\, 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}\ln|sen 2^x| + c$

11. Resuelve las siguientes integrales aplicando la fórmula.

$$\int \frac{1}{a^2 + b^2x^2}dx = \frac{1}{a.b}.\arctan\frac{bx}{a} + c \qquad \int \frac{f'}{a^2 + b^2f^2}dx = \frac{1}{a.b}.\arctan\frac{bf}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}dx = \frac{1}{a}.\arcsen\frac{bx}{a} \qquad \int \frac{f'}{\sqrt{a^2 - b^2f^2}}dx = \frac{1}{a}.\arcsen\frac{bf}{a}$$

a. $\int \frac{x^3}{1 + x^8}dx = \frac{1}{4}\arctan x^4 + c$

VER VIDEO https://youtu.be/GkEr3BcW3NE

b. $\int \frac{sen2x}{2 + 3\cos^2 2x}dx = \frac{-1}{2\sqrt{6}}\arctan\sqrt{\frac{3}{2}}\cos 2x + c$

VER VIDEO https://youtu.be/QMipVawDZDI

c. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + x)}dx = 2.\arctan\sqrt{x} + c$

VER VIDEO https://youtu.be/MMkCwOZY0Rs

12. Resuelve las siguientes integrales aplicando la fórmula.

$$\int \frac{1}{a^2 + b^2x^2}dx = \frac{1}{a.b}.\arctan\frac{bx}{a} + c \qquad \int \frac{f'}{a^2 + b^2f^2}dx = \frac{1}{a.b}.\arctan\frac{bf}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}dx = \frac{1}{a}.\arcsen\frac{bx}{a} \qquad \int \frac{f'}{\sqrt{a^2 - b^2f^2}}dx = \frac{1}{a}.\arcsen\frac{bf}{a}$$

a. $\int \frac{x}{1 + x^4}dx$

b. $\int \frac{3}{3 + 2x^2}dx$

c. $\int \frac{e^{2x}}{2 + e^{4x}}dx$

d. $\int \frac{1}{\cos^2 x.\sqrt{1 - \tan^2 x}}dx$

e. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1 - x}}dx$

a. $\int \frac{x}{1 + x^4}dx = \int \frac{x}{1 + (x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1 + (x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\arctan x^2 + c$

b. $\int \frac{3}{3+2x^2}dx = 3\int \frac{1}{3+2x^2}dx = 3\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\sqrt{\frac{2}{3}}x + c$

c. $\int \frac{e^{2x}}{2+e^{4x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{2+(e^{2x})^2}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{e^{2x}}{\sqrt{2}} + c$

d. $\int \frac{1}{\cos^2 x.\sqrt{1-\tan^2 x}}dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\sqrt{1-\tan^2 x}}dx = \operatorname{arcsen}(\tan x) + c$

e. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx = 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}dx = 2.\operatorname{arcsen}\sqrt{x} + c$

2. INTEGRACIÓN POR PARTES

Ver vídeo https://youtu.be/wSPvUsxFHMw

Se resuelven aplicando la siguiente fórmula

$$\int \mathbf{udv} = \mathbf{uv} - \int \mathbf{vdu}$$

a. Las integrales que sean un producto de funciones elementales distintas y no sean inmediatas.

1. Calcula la siguiente integral:

$$\int (\mathbf{x^2+1}) \cdot \mathbf{\ln x\, dx}$$

VER VIDEO https://youtu.be/c-EqZnhLAyw

$$\int (x^2+1)\cdot \ln x\, dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x - \int\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} - x + c$$

$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$dv = x^2+1 \rightarrow v = \frac{x^3}{3}+x$

2. Calcula la siguiente integral:

$$\int \mathbf{x.\,senx\, dx}$$

$$\int x.\,\mathrm{sen}x\, dx \underbrace{=}_{1} -x\cos x - \int -\cos x\, dx = -x\cos x + \mathrm{sen}x + c$$

1) Para elegir la función a la que llamamos **u** aplicamos la llamada regla de los

ALPES: $\begin{cases} \text{Arcos} \\ \text{Logaritmos} \\ \text{Polinomios} \\ \text{Exponenciales} \\ \text{Sen, cos.} \end{cases}$. La función que esté más arriba en la tabla es la **u**

$$1)\begin{cases} u = x \overset{\text{derivando}}{\rightarrow} du = dx \\ dv = \operatorname{sen}x\,dx \overset{\text{integrando}}{\rightarrow} v = \int \operatorname{sen}x\,dx = -\cos x \end{cases}$$

3. Calcula la siguiente integral:

$$\int \mathbf{x.e^x dx}$$

$$\int x.e^x dx \underbrace{=}_{1} x.e^x - \int e^x dx = x.e^x - e^x + c$$

$$1)\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{cases}$$

4. Calcula la siguiente integral:

$$\int \mathbf{(x^2 + x)\cos x\,dx}$$

$$\int (x^2 + x)\cos x\,dx \underbrace{=}_{1} (x^2 + x)\operatorname{sen}x - \int (2x+1)\operatorname{sen}x\,dx \underbrace{=}_{2}$$

$$= (x^2 + x)\operatorname{sen}x - \left(-(2x+1)\cos x - 2\int -\cos x\;dx\right)$$

$$= (x^2 + x)\operatorname{sen}x + (2x+1)\cos x - 2\operatorname{sen}x + c$$

$$1)\begin{cases} u = x^2 + x \rightarrow du = (2x+1)dx \\ dv = \cos x\,dx \rightarrow v = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen}x \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} u = 2x + 1 \rightarrow du = 2dx \\ dv = \operatorname{sen}x\,dx \rightarrow v = \int \operatorname{sen}x\,dx = -\cos x \end{cases}$$

5. Calcula la siguiente integral:

$$\int \mathbf{\frac{x}{\cos^2 x}dx}$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = \int x.\frac{1}{\cos^2 x}dx \underbrace{=}_{1} x.\tan x - \int \tan x\,dx = x.\tan x + \ln|\cos x| + c$$

$$1)\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx \rightarrow v = \int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x \end{cases}$$

6. Calcula la siguiente integral:

$$\int \mathbf{x^2 \ln x\,dx}$$

$$\int x^2 \ln x\, dx \underbrace{=}_{1} \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$$

$$1)\begin{cases} u = \ln x \to du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x^2\, dx \to v = \displaystyle\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

7. Calcula la siguiente integral:

$$\int \mathbf{e^x.\, senx\, dx.}$$

VER VIDEO https://youtu.be/S_-vmQoKW4Y

$$\int e^x.\, \text{senx}\, dx \underbrace{=}_{1} -\, e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx \underbrace{=}_{2}$$

$= -e^x\cos x + (e^x \text{senx} - \int e^x \text{senx}\, dx)$; Esta es una integral cíclica, si volvemos a aplicar la integración por partes volveremos a lo mismo. Nos ha quedado:

$$\underbrace{\int e^x.\, \text{senx}\, dx}_{I} = -e^x\cos x + \left(e^x \text{senx} - \underbrace{\int e^x \text{senx}\, dx}_{I}\right) \to I = -e^x \cos x + e^x \text{senx} - I$$

$$\text{Despejando la I, tenemos: } I = \int e^x.\, \text{senx}\, dx = \frac{1}{2}(-e^x\cos x + e^x \text{senx}) + c$$

$$1)\begin{cases} u = e^x \to du = e^x dx \\ dv = \text{senx}\, dx \to v = \displaystyle\int \text{senx}\, dx = -\cos x \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} u = e^x \to du = e^x dx \\ dv = \cos x\, dx \to v = \displaystyle\int \cos x\, dx = \text{senx} \end{cases}$$

8. Calcula la siguiente integral:

$$\int \mathbf{x.\, arctanx\, dx.}$$

VER VIDEO https://youtu.be/Ek7BmI88Eh8

$$\int x.\, \text{arctanx}\, dx \underbrace{=}_{1} \frac{x^2}{2}.\, \text{arctanx} - \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{x^2}{1+x^2}}_{2,\text{dividimos}} dx =$$

$$\frac{x^2}{2}.\, \text{arctanx} - \frac{1}{2}\int 1\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2}.\, \text{arctanx} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\text{arctanx} + c$$

$$1)\begin{cases} u = \text{arctanx} \to du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = x\, dx \to v = \displaystyle\int x\, dx = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{array}{r|l} x^2 & x^2+1 \\ \hline -x^2-1 & 1 \\ / \quad -1 & \end{array}$$

b. Algunas integrales $\int \ln f\, dx$.

9. Calcula la siguiente integral:

$$\mathbf{9.}\ \int \mathbf{lnx\ dx.}$$

VER VIDEO https://youtu.be/QmYceta50OU

$$\int \ln x\, dx \underbrace{=}_{1} x.\ln x - \int 1.dx = x.\ln x - x + c$$

$$1)\begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx \rightarrow v = \displaystyle\int dx = x \end{cases}$$

10. Calcula la siguiente integral:

$$\int \mathbf{\ln(x^2+1)\ dx}$$

VER VIDEO https://youtu.be/gSkOVOsPQSA

$$\int \ln(x^2+1)\,dx \underbrace{=}_{1} x.\ln(x^2+1) - 2\int \underbrace{\frac{x^2}{x^2+1}}_{2} dx$$

$$x.\ln(x^2+1) - 2\left[\int dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx\right] = x.\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x + c$$

$$1)\begin{cases} u = \ln(x^2+1) \rightarrow du = \dfrac{2x}{1+x^2}dx \\ dv = 1\,dx \rightarrow v = \displaystyle\int 1\,dx = x \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{array}{r|l} x^2 & x^2+1 \\ \hline -x^2-1 & 1 \\ \hline \quad -1 & \end{array}$$

c. Algunas integrales $\int$ arco … f dx.

11. Calcula la siguiente integral:

$$\int \mathbf{arcsenx\ dx}$$

VER VIDEO https://youtu.be/6x4xJJcsKrY

$$\int \text{arcsenx}\,dx \underbrace{=}_{1} x.\text{arcsenx} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= x.\text{arcsenx} - \frac{-1}{2}\int -2x.(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}dx = x.\text{arcsenx} + \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$= x.\text{arcsenx} + \sqrt{(1-x^2)} + c$$

$$1)\begin{cases} u = \operatorname{arcsen}x \rightarrow du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = 1\,dx \rightarrow v = \displaystyle\int 1\,dx = x \end{cases}$$

12. Calcula la siguiente integral:

$$\int \mathbf{arctanx\ dx.}$$

VER VIDEO https://youtu.be/66u6n0e6Wgw

$$\int \operatorname{arctan}x\,dx = x\operatorname{arctan}x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = x.\operatorname{arctan}x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$$

$$1)\begin{cases} u = \operatorname{arctan}x \rightarrow du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = 1\,dx \rightarrow v = \displaystyle\int 1\,dx = x \end{cases}$$

13. Calcula las siguientes integrales:

a. $\int x.\operatorname{sen}x\,dx$ **b.** $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$ **c.** $\int \operatorname{sen}(\ln x)dx$ ***d.*** $\int x\operatorname{tg}^2x\,dx$

e. $\int \ln^2x\,dx$ ***f.*** $\int \operatorname{arccotan}x\,dx$ **g.** $\int e^{3x}\operatorname{sen}2x\,dx$ **h.** $\int \operatorname{sen}^2 3x\,dx$

a. $\int x.\operatorname{sen}x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen}x + c$

b. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \frac{-1}{2x^2}\ln|x| - \frac{1}{4x^2} + c$

c. $\int \operatorname{sen}(\ln x)dx = \frac{1}{2}x.[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] + c$

d. $\int x\operatorname{tg}^2x\,dx = x.\operatorname{tag}x - \frac{x^2}{2} - \ln|\cos x| + c$

e. $\int \ln^2x\,dx = x.(\ln^2x - 2\ln|x| + 2) + c$

f. $\int \operatorname{arccotan}x\,dx = x.\operatorname{arccotan}x + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$

g. $\int e^{3x}\operatorname{sen}2x\,dx = \frac{1}{13}e^{3x}(-2\cos 2x + 3\operatorname{sen}2x) + c$

h. $\int \operatorname{sen}^2 3x\,dx = \frac{-\cos 3x.\operatorname{sen}3x}{6} + \frac{x}{2} + c$

3. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES.
Ver vídeo https://youtu.be/1M1xJCcZHqw

$$\mathbf{I} = \int \frac{\mathbf{p(x)}}{\mathbf{q(x)}}\mathbf{dx}$$

a. SI SE PUEDE DIVIDIR (GRADO NUMERADOR ≥ GRADO DENOMINADOR) SE DIVIDE.

$$\mathbf{I = \int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int c(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx}$$

Siendo c(x) el cociente de la división y r(x) el resto.

1. Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{x+1}{x-1} dx$$

VER VIDEO https://youtu.be/z8ODPCBkmXo

$$\int \frac{x+1}{x-1} dx = \int 1.dx + 2\int \frac{1}{x-1} dx = x + 2\ln|x-1| + c$$

$$\begin{array}{rl} x+1 & \underline{|x-1} \\ \underline{-x+1} & \quad 1 \\ 2 & \end{array}$$

b. OBSERVA SI LA INTEGRAL ES INMEDIATA.

2. Calcula las siguientes integrales:

a. $\int \frac{x-1}{x^2-2x} dx$ **Del tipo** $\int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + c$

b. $\int \frac{1}{2x^2+4} dx.$ **Del tipo** $\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \operatorname{arctag} f + c$

c. $\int \frac{2x-1}{x^2+1} dx$ **Del tipo** $\int \frac{ax+b}{cx^2+d} dx$ **(siendo c y d positivos)**

VER VIDEO https://youtu.be/38FKl7l7FTY

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)}{x^2-2x} dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x| + c$$

$$\int \frac{1}{2x^2+4} dx \overset{1}{=} \int \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)} dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2+1}.dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2+1}.dx =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2}\int \frac{\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{f'}}{\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}x}_{f}\right)^2+1}.dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctag}\frac{1}{\sqrt{2}}x + c$$

1 Dividimos numerador y denominador por 4.

3. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{x^3}{1+x^8} dx$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^8}dx = \int \frac{x^3}{1+(x^4)^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+(x^4)^2}dx = \frac{1}{4}\operatorname{arctag}(x^4)+c$$

c. FACTORIZA EL DENOMINADOR.

I. LAS SOLUCIONES SON REALES Y DISTINTAS.

3. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x^2-4x+3}}\mathbf{dx}$$

VER VIDEO https://youtu.be/iXxoNspF6nQ

$$\int \frac{x}{x^2-4x+3}dx \underbrace{=}_{1} \int \frac{x}{(x-1).(x-3)}dx = \int \underbrace{\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}\right)}_{\text{Una fracción para cada factor}} dx \underbrace{=}_{2}$$

$$= \frac{-1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-3}dx = \frac{-1}{2}\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x-3| + c$$

1) No puedo dividir. No es inmediata. Factorizo el denominador.

$$x^2-4x+3=0\ \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases} \rightarrow\ x^2-4x+3=(x-1).(x-3)$$

2) Para calcular A y B:

$$\frac{x}{(x-1).(x-3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-1)}{(x-1)(x-3)} \rightarrow$$

$x = A(x-3)+B(x-1)$; dando a x los valores que anulan al denominador y algún otro si fuera necesario:

$$\begin{cases} \text{si } x=1 \ \rightarrow 1=-2A \ \rightarrow A=\dfrac{-1}{2} \\ \text{si } x=3 \ \rightarrow 3=2B \ \rightarrow B=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

4. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{2x^2+5x-1}}{\mathbf{x^3+x^2-2x}}\mathbf{dx}$$

VER VIDEO https://youtu.be/VehfOYxIu2s

$$\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}dx = \frac{1}{2}\ \ln|x| + \ 2\ln|x-\ 1| - \frac{1}{2}\ \ln|x\ +\ 2|\ +\ c$$

5. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^2-x-2}}\mathbf{dx}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - x - 2}\,dx = \frac{-1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + c$$

6. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{x^3 + 2x^2 - 2x - 5}}{\mathbf{x^2 + 2x - 3}}\,\mathbf{dx}$$

$$\int \frac{\mathbf{x^3 + 2x^2 - 2x - 5}}{\mathbf{x^2 + 2x - 3}}\,\mathbf{dx} = \frac{1}{2}x^2 - \ln|x-1| + 2\ln|x+3| + c$$

7. Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{\mathbf{2x^2 + x - 2}}{\mathbf{x^3 - 2x^2 - x + 2}}\,\mathbf{dx}$$

VER VIDEO https://youtu.be/0ZSB3I7dGRw

$$\int \frac{2x^2 + x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\,dx = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}\right)dx =$$
$$= \frac{-1}{6}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{-1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{8}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx =$$
$$= \frac{-1}{6}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{8}{3}\ln|x-2| + c$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2)$$
$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} = \frac{A\cdot(x-1)\cdot(x-2) + B\cdot(x+1)\cdot(x-2) + C\cdot(x^2-1)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)}$$

$$A\cdot(x-1)\cdot(x-2) + B\cdot(x+1)\cdot(x-2) + C\cdot(x^2-1) = 2x^2 + x - 2$$

$$A = \frac{-1}{6};\ B = \frac{-1}{2}\ \text{y}\ C = \frac{8}{3}$$

8. Resolver la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{x - 2}}{\mathbf{x^2 + x}}\,\mathbf{dx}$$

VER VIDEO https://youtu.be/G44oll9BVdA

$$\int \frac{x-2}{x^2+x}\,dx = \int \frac{x-2}{x\cdot(x+1)}\,dx \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}\right)dx = \int \frac{A(x+1) + Bx}{x^2+x}\,dx =$$
$$= -2\int \frac{1}{x}\,dx + 3\int \frac{1}{x+1}\,dx = -2\ln|x| + 3\ln|x+1| + c$$

$$x - 2 = A(x+1) + Bx \rightarrow \begin{cases} \text{Si } x = 0 \rightarrow -2 = A \\ \text{Si } x = -1 \rightarrow -3 = -B \rightarrow B = 3 \end{cases}$$

II. LAS SOLUCIONES SON REALES Y ALGUNA ESTÁ REPETIDA.

9. Calcular la siguiente integral.

$$\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}dx$$

VER VIDEO https://youtu.be/luFa-m0vw0k

$$\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}dx = \int \left(\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{(x+3)^3}\right)dx \overset{*}{\underset{}{=}}$$

$$= 2\int \frac{1}{(x+3)^2}dx - \int \frac{1}{(x+3)^3dx}dx = \frac{-2}{x+3}+\frac{1}{2(x+3)^2}+K$$

$$* \frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{(x+3)^3} = \frac{A(x+3)^2+B(x+3)+C}{(x+3)^3} = \frac{2x+5}{(x+3)^3}$$

$$A(x+3)^2+B(x+3)+C = 2x+5 \rightarrow \begin{cases} \text{para } x=-3: C=-1 \\ \text{para } x=0: 9A+3B+C=5 \\ \text{para } x=1: 16A+4B+C=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=2 \\ C=-1 \end{cases}$$

10. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{x-1}{x^3+2x^2+x}dx$$

$$\int \frac{x-1}{x^3+2x^2+x}dx \underbrace{=}_{1} \int \frac{x-1}{x.(x+1)^2}dx = \int \overbrace{\underbrace{\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}}_{\text{Una fracción para cada factor}}}^{\text{La tercera fracción lleva el x+1 al cuadrado}} dx \underbrace{=}_{2}$$

$$= -1\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x+1}dx + 2\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = -\ln|x| + \ln|x+1| + 2\int (x+1)^{-2}dx =$$

$$= -\ln|x| + \ln|x+1| + 2\frac{(x+1)^{-1}}{-1} = -\ln|x| + \ln|x+1| - 2\frac{1}{x+1} + c$$

1) No puedo dividir. No es inmediata. Factorizo el denominador.

$$x^3+2x^2+x = 0 \rightarrow x.(x^2+2x+1) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=-1(\text{doble}) \end{cases} \rightarrow x^3+2x^2+x = x.(x+1)^2$$

2) Para calcular A y B:

$$\frac{x-1}{x.(x+1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A.(x+1)^2+B.x.(x+1)+C.x}{x.(x+1)^2} \rightarrow$$

$\rightarrow x-1 = A.(x+1)^2 + B.x.(x+1) + C.x$; dando a x valores que anulan al denominador y algún otro si fuera necesario:

$$\begin{cases} \text{Si } x=-1 \rightarrow -2=-C \rightarrow C=2 \\ \text{Si } x=0 \rightarrow -1=A \rightarrow A=-1 \\ \text{Si } x=1 \rightarrow 0=4A+2B+C \rightarrow B=1 \end{cases}$$

11. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{2x^2+7x-1}}{\mathbf{x^3+x^2-x-1}}\mathbf{dx} = 2\ln|x-1| - \frac{3}{x+1} + c$$

12. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{2x-4}}{\mathbf{(x-1)^2(x+3)}}\mathbf{dx} = \frac{5}{8}\ln|x-1| + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{5}{8}\ln|x+3| + c$$

13. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x(x-1)^2}}\mathbf{dx} = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c$$

14. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{6x^2-3x+2}}{\mathbf{x^3-x^2}}\mathbf{dx} = \ln|x| + \frac{2}{x} + 5\ln(x-1) + c$$

III. HAY SOLUCIONES COMPLEJAS

EL NUMERADOR ES CONSTANTE Y DENOMINADOR DE 2º GRADO.

15. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^2+x+1}}\mathbf{dx}$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx \underbrace{\overbrace{=}^{1}}_{2} \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx \underbrace{=}_{3} \frac{2}{\sqrt{3}}.\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) + c$$

1) No puedo dividir. No es inmediata. Factorizo el denominador.

$X^2+x+1=0 \rightarrow$ No tiene solución real. x^2+x+1 no se puede factorizar.

2) Escribimos el denominador de la forma $k.(x+p)^2+q$

$x^2+x+1 = k.(x+p)^2+q = kx^2+2kpx+kp^2+q$

Comparando polinomios $\begin{cases} k=1 \\ 2kp=1 \rightarrow p=\frac{1}{2} \\ kp^2+q=1 \rightarrow q=\frac{3}{4} \end{cases}$

3) Aplicamos la fórmula: $\int \frac{f'}{a^2+b^2f^2}dx = \frac{1}{a.b}.\arctan\frac{bf}{a} + c$

16. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{x^2+x+2}}\mathbf{dx} = 2.\arctan(x+1) + c$$

17. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{x^2+2x+3}}\,\mathbf{dx} = \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c$$

EL NUMERADOR ES UN POLINOMIO DE PRIMER GRADO Y EL DENOMINADOR DE 2º GRADO.

18. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{x+2}}{\mathbf{2x^2+4x+3}}\,\mathbf{dx}$$

$$\int \frac{x+2}{2x^2+4x+3}\,dx \underbrace{=}_{\substack{1\\2}} \int \frac{\frac{1}{4}(4x+4)+1}{2x^2+4x+3}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{4x+4}{2x^2+4x+3}\,dx + \underbrace{\int \frac{1}{2x^2+4x+3}\,dx}_{\text{La hacemos aparte.}3}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2+4x+3| + \underbrace{\int \frac{1}{2x^2+4x+3}\,dx}_{\substack{\text{esta integral es como}\\\text{la del ejemplo 7.}}}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2+4x+3| + + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}(x+1) + c$$

1) No puedo dividir. No es inmediata. Factorizo el denominador.

$2x^2+4x+3=0 \rightarrow$ No tiene solución real. $2x^2+4x+3$ no se puede factorizar.

2) Escribo el numerador de la forma k. (derivada del denominador) $+$ p

$$x+2 = k.(4x+4)+p = 4kx+4k+p \rightarrow \begin{cases} 4k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{4} \\ 4k+p = 2 \rightarrow p = 1 \end{cases}$$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+4x+3}\,dx = \int \frac{1}{2.(x+1)^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}(x+1) + c$

19. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{x^2+x+1}}\,\mathbf{dx} = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} + c$$

20. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{3x-4}}{\mathbf{x^2+2x+4}}\,\mathbf{dx} = \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+4| - \frac{7\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

EL DENOMINADOR ES DE GRADO SUPERIOR A 2

21. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^3-x^2+2x}}\,\mathbf{dx}$$

El polinomio x^2-x+2 no se puede factorizar. Observa como escribimos la fracción

$$\int \frac{1}{x^3-x^2+2x}dx \underbrace{=}_{1} \int \frac{1}{x.(x^2-x+2)}dx = \int \overbrace{\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-x+2}} dx \underbrace{=}_{2}$$

Esta integral es como la del ejemplo 8.

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\underbrace{\overbrace{\int \frac{-x+1}{x^2-x+2}dx}}_{3}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\ln|x^2-x+2| + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\text{arctag}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{7}}\right)\right) + c$$

1) No puedo dividir. No es inmediata. Factorizo el denominador.

$$X^3-x^2+2x=0 \to x.(x^2-x+2)=0\begin{cases} x=0 \\ x^2-x+2=0 \to \text{No tiene sol. real.}\end{cases}$$

$$x^3-x^2+2x = x.(x^2-x+2)$$

2) Para calcular A , B y C:

$$\frac{1}{x.(x^2-x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2-x+2)} = \frac{A(x^2-x+2)+(Bx+C)x}{x.(x^2-x+2)} \to 1 = A(x^2-x+2)+(Bx+C)x$$

Dando a x los valores que anulan al denominador y algún otro si fuera necesario:

$$\begin{cases} \text{Si } x=0 \to 1=2A \to A=\frac{1}{2} \\ \text{Si } x=1 \to 1=2A+B+C \\ \text{Si } x=-1 \to 1=4A+B-C \end{cases} \text{Resolviendo el sistema rojo} \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{-1}{2} \\ C=\frac{1}{2}\end{cases}$$

3) $\int \frac{-x+1}{x^2-x+2}dx$

$$= \int \frac{\frac{-1}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}}{x^2-x+2}dx = \frac{-1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+2}dx =$$

$$= \frac{-1}{2}\ln|x^2-x+2| + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\text{arctag}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{7}}\right)$$

22. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{2x^2-3x+2}}{\mathbf{x^3+x}}\mathbf{dx} = 2\ln|x| - 3\text{arctag}x + c$$

23. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x^3+2x^2+2x+1}}\mathbf{dx} = -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

4. INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE.

Cualquier integral de las que se han hecho aplicando la tabla se puede hacer también por sustitución.

1. Calcula la siguiente integral.

$$\int \mathbf{cosx.sen^3x\,dx} =$$

$$\int cosx.sen^3x\,dx = \int cosx.sen^3x\,dx = \frac{sen^4x}{4} + c$$

$$\int cosx.sen^3x\,dx \underbrace{=}_{1} \int t^3dt = \frac{t^4}{4} \underbrace{=}_{\substack{\text{sustituyo t}\\ \text{por su valor}}} \frac{sen^4x}{4} + c$$

$$1.\ senx = t \overset{\text{derivando}}{\rightarrow} cosx\,dx = dt$$

2. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{ln^2x}}{\mathbf{x}}\mathbf{dx}$$

$$\int \frac{ln^2x}{x}dx = \int \frac{1}{x}ln^2x\,dx = \frac{ln^3x}{3} + c$$

$$\int \frac{ln^2x}{x}dx = \int \frac{1}{x}ln^2x\,dx \underbrace{=}_{1} \int t^2dt = \frac{t^3}{3} \underbrace{=}_{\substack{\text{sustituyo t}\\ \text{por su valor}}} \frac{ln^3x}{3} + c$$

$$1.\ lnx = t \overset{\text{derivando}}{\rightarrow} \frac{1}{x}dx = dt$$

3. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1-3x}}\,\mathbf{dx}$$

$$\int \frac{2}{1-3x}\,dx = 2\int \frac{1}{1-3x}\,dx = \frac{-2}{3}\int \frac{-3}{1-3x}\,dx = \frac{-2}{3}.\ln|1-3x| + c$$

$$\int \frac{2}{1-3x}\,dx = 2\int \frac{1}{1-3x}\,dx \underbrace{=}_{1} 2\int \frac{1}{t}\,\frac{-dt}{3} = \frac{-2}{3}.\ln|t| \underbrace{=}_{\substack{\text{sustituyo t}\\ \text{por su valor}}} \frac{-2}{3}.\ln|1-3x|$$

$$1.\ 1-3x = t \overset{\text{derivando}}{\rightarrow} -3dx = dt \rightarrow dx = \frac{-dt}{3}$$

Hacemos cambio de variable en las integrales $\int R(e^x; a^x)dx$. Integrales racionales con presencia de la exponencial.

4. Calcular la siguiente integral.

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx$$

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx \underset{1}{=} \int \frac{1}{1+t}\frac{dt}{t} = \int \left(\frac{A}{1+t}+\frac{B}{t}\right)dt = -\int \frac{1}{1+t}dt + \int \frac{1}{t}dt =$$

$$= -\ln|1+t| + \ln|t| == -\ln|1+e^x| + \ln|e^x| + c$$

$$1.\ e^x = t \overset{\text{derivando}}{\rightarrow} e^x dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

5. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{1+2^x}{1-2^x}dx$$

$$\int \frac{1+2^x}{1-2^x}dx \underset{1}{=} \int \frac{1+t}{1-t}\cdot\frac{dt}{t\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{1+t}{t.(1-t)}dt = \frac{1}{\ln 2}\int \left(\frac{A}{t}+\frac{B}{1-t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\int \left(\frac{1}{t}dt + (-)2\int \frac{-1}{1-t}dt\right) = \frac{1}{\ln 2}[\ln|t| - 2\ln|1-t|]$$

$$= \frac{1}{\ln 2}[\ln|2^x| - 2\ln|1-2^x|] + c$$

$$1.\ 2^x = t \overset{\text{derivando}}{\rightarrow} 2^x \ln 2 . dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{2^x \ln 2} = \frac{dt}{t\cdot \ln 2}$$

Hacemos cambio de variable en las integrales $\int R(\cos^2 x; \operatorname{sen}^2 x; \tan^2 x)dx$. Integrales racionales con presencia del $\cos^2 x$ y/o $\operatorname{sen}^2 x$ y/o $\tan^2 x$.

$$\text{Hacemos el cambio } \mathbf{\tan x} = t \begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \tan x = t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{cases}$$

6. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{1}{1+\cos^2 x}dx$$

$$\int \frac{1}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{1+\frac{1}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{\frac{2+t^2}{\cancel{1+t^2}}}\cdot\frac{dt}{\cancel{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + c$$

7. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\tan^2 x}{1-\cos^2 x}$$

$$\int \frac{\tan^2 x}{1-\cos^2 x}\,dx = \int \frac{t^2}{1-\frac{1}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2}{\frac{t^2}{\cancel{1+t^2}}}\frac{dt}{\cancel{1+t^2}} = \int dt = t = \tan x + c$$

Hacemos cambio de variable en las integrales $\int R(\cos x; \operatorname{sen} x; \tan x)dx$. Integrales racionales con presencia del cosx y/o senx y/o tanx.

$$\text{Hacemos el cambio } \tan\frac{x}{2} = t \begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan x = \dfrac{2t}{1-t^2} \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{cases}$$

8. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}dx$$

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}dx = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{\frac{t^2+2t+1}{\cancel{1+t^2}}}\frac{2dt}{\cancel{1+t^2}} = 2\int \frac{1}{t^2+2t+1}dt$$

$$2\int \frac{1}{(t+1)^2}dt = 2\int (t+1)^{-2}dt = -2\,(t+1)^{-1} = \frac{-2}{t+1} = \frac{-2}{\tan\frac{x}{2}+1} + c$$

9. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{\cancel{1+t^2}}}\frac{2dt}{\cancel{1+t^2}} = \int \frac{2}{1-t^2}\,dt = \int \left(\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}\right)dt =$$

$$\int \frac{1}{1-t}\,dt + \int \frac{1}{1+t}\,dt = -\ln|1-t| + \ln|1+t| + c$$

Hacemos cambio de variable en las integrales $\int$ que incluyen $\sqrt{ax+b}\,dx$.

Hacemos el cambio **ax + b = t²**

10. Calcula la siguiente integral.

$$\int \sqrt{3x-1}\,dx$$

$$\int \sqrt{3x-1}\,dx \underbrace{=}_{1} \frac{2}{3}\int t^2 dt = \frac{2}{3}\frac{t^3}{3} = \frac{2}{9}\left(\sqrt{3x-1}\right)^3 + c = \frac{2}{9}(3x-1)\sqrt{3x-1} + c$$

$$1.\ 3x-1 = t^2 \xrightarrow{\text{derivando}} 3.dx = 2t.dt \to dx = \frac{2}{3}t.dt$$

11. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx \underbrace{=}_{1} \int \frac{2t^2}{1+t}dt \overset{\text{dividir}}{=} \int 2t - 2dt + 2\int \frac{1}{t+1}dt = t^2 - 2t + \ln|t+1| =$$
$$= x - 2\sqrt{x} + \ln\left|\sqrt{x}+1\right| + c$$

$$1.\ x = t^2 \xrightarrow{\text{derivando}} dx = 2t.dt$$

12. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{6t^5}{t^2+t^3}dt = 6\int \frac{t^3}{1+t}dt \overset{\text{dividir}}{=} 6\int t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}dt =$$
$$2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|1+t| + c = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right| + c$$

$$1.\ x = t^{\text{mínimo común multiplo de los índices}} \to x = t^6 \xrightarrow{\text{derivando}} dx = 6t^5.dt$$

Hacemos cambio de variable en las integrales $\int$ que incluyen:

$$\sqrt{a^2-b^2x^2};\ \text{hacemos el cambio } \mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\,\mathbf{sen\ t}$$
$$\sqrt{a^2+b^2x^2};\ \text{hacemos el cambio } \mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\,\mathbf{tan\ t}$$
$$\sqrt{b^2x^2-a^2};\ \text{hacemos el cambio } \mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\,\mathbf{sec\ t}$$

13. Calcula la siguiente integral.

$$\int \sqrt{\mathbf{4-x^2}}\,\mathbf{dx}$$

$$\int \sqrt{4-x^2}dx \underbrace{=}_{1} \int \sqrt{\underbrace{4-4sen^2t}_{2}}.2.cost.dt = 4\int \sqrt{cos^2t}cot.dt =$$

$$4\int cos^2t.dt = 4\int \frac{1+cos2t}{2}.dt = 2t + sen2t + c = 2.arcsen\frac{x}{2} + \underbrace{sen2arcsen\frac{x}{2}}_{3} + c$$

$$= 2.arcsen\frac{x}{2} + x.\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} + c$$

$$\mathbf{1.}\ x = 2.sent \begin{cases} \overset{derivando}{\rightarrow} \quad dx = 2.cost.dt \\ t = arcsen\frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\mathbf{2.}\ \sqrt{4-4sen^2t} = \sqrt{4(1-sen^2t)} = 2\sqrt{1-sen^2t} = 2\sqrt{cos^2t} = 2.cost$$

$$\mathbf{3.}\ sen2\underbrace{arcsen\frac{x}{2}}_{\alpha} = sen2\alpha = 2.sen\alpha.cos\alpha = 2.\frac{x}{2}.\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$\alpha = arcsen\frac{x}{2} \rightarrow sen\alpha = \frac{x}{2} \rightarrow cos\alpha \underbrace{=}_{cos\alpha=\sqrt{1-sen^2\alpha}} \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

14. Calcula la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{4+x^2}}}\mathbf{dx}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx \underbrace{=}_{1} \int \frac{1}{\sqrt{\underbrace{4+4tan^2t}_{2}}}.2.\frac{1}{cos^2t}.dt = 4\int \frac{1}{2.\frac{1}{cost}}.2.\frac{1}{cos^2t}dt =$$

$$4\int \frac{1}{cost}.dt \underbrace{=}_{3} 4\int \frac{1}{\frac{1-z^2}{\cancel{1+z^2}}}\frac{2dt}{\cancel{1+z^2}} = 4\int \frac{2}{1-z^2}dt = 4\int \left(\frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z}\right)dt =$$

$$4\int \frac{1}{1-z}dz + 4\int \frac{1}{1+z}dz = -4ln|1-z| + 4ln|1+z| + c$$

$$= -4ln\left|1 - tan\frac{t}{2}\right| + 4ln\left|1+tan\frac{t}{2}\right| + c$$

$$-4ln\left|1 - tan\frac{arctan\frac{x}{2}}{2}\right| + 4ln\left|1 + tan\frac{arctan\frac{x}{2}}{2}\right| + c$$

$$\mathbf{1.}\ x = 2.tant \begin{cases} \overset{derivando}{\rightarrow} \quad dx = 2.\frac{1}{cos^2t}.dt \\ t = arctan\frac{x}{2} \end{cases}$$

2. $\sqrt{4+4\tan^2 t}=\sqrt{4(1+\tan^2 t)}=2\sqrt{1+\tan^2 t}=2\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}}=2.\dfrac{1}{\cos t}$

3. $\tan\dfrac{t}{2}=\ z;\ \cos t=\dfrac{1-z^2}{1+z^2};\ dt=\dfrac{2dz}{1+z^2}$

5. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

a. $\int \mathbf{sen^k x\, dx}$ o $\int \mathbf{cos^k x\, dx}$, si k es impar

1. Calcula la integral siguiente.

$$\int \mathbf{sen^3x\, dx}$$

$$\int sen^3x\, dx=\int senx.\,sen^2x\, dx\underbrace{=}_{1}\int senx.\,(1-\cos^2x)dx=$$

$$\int senx\, dx-\int senx.\cos^2x\, dx=\frac{sen^2x}{2}+\frac{\cos^3x}{3}+c$$

1. $-\ sen^2x+\cos^2x=1\rightarrow sen^2x=1-\cos^2x$

Está hecha aplicando las fórmulas de integración inmediata. La podríamos hacer como el ej. 2, por cambio de variable.

2. Calcula la integral siguiente.

$$\int \mathbf{cos^5x\, dx}$$

$$\int \cos^5x\, dx=\int \cos x.\cos^4x\, dx=\int \cos x.\,(1-sen^2x)^2dx\overset{\substack{\text{cambio de variable}\\ senx=t\\ \cos x\, dx=dt}}{=}$$

$$=\int(1-t^2)^2\, dt=\int(1-2t^2+t^4)dt=t-2\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+c=$$

$$senx-2\frac{sen^3x}{3}+\frac{sen^5x}{5}+c$$

Está hecha por cambio de variable. La podríamos hacer como el ej. 1, aplicando las fórmulas de integración inmediata.

b. $\int \mathbf{sen^k x\, dx}$ o $\int \mathbf{cos^k x\, dx}$, si k es par

$$\begin{cases}\mathbf{sen^2mx=\dfrac{1}{2}(1-cos2mx)}\\ \mathbf{cos^2mx=\dfrac{1}{2}(1+cos2mx)}\end{cases}$$

3. Calcula la integral siguiente.

$$\int \mathbf{sen^2x\ dx}$$

$$\int \text{sen}^2\text{x dx} = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2\text{x})\ \text{dx} = \frac{1}{2}\left(\text{x} - \frac{\text{sen2x}}{2}\right) + \text{c}$$

4. Calcula la integral siguiente.

$$\int \mathbf{cos^4x\ dx}$$

$$\int \cos^4\text{x dx} = \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2\text{x})\right)^2 \text{dx} = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2\text{x} + \cos^2 2\text{x})\text{dx} =$$
$$\frac{1}{4}\text{x} - \text{sen2x} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4\text{x})\text{dx} = \frac{1}{4}\text{x} - \text{sen2x} + \frac{1}{8}\text{x} + \frac{\text{sen4x}}{32} + \text{c}$$

c. $\int$ sen^{k}x. cos ^{p}x dx. Si k y/o p son 1: Es inmediata.

5. Calcula la integral siguiente.

$$\int \mathbf{cosx.\ sen^3x\ dx}$$

$$\int \text{cosx. sen}^3\text{x dx} = \frac{\text{sen}^4\text{x}}{4} + \text{c}$$

d. $\int$ sen^{k}x. cos ^{p}x dx. Si k y/o p son impares $\neq$ 1.

6. Calcula la integral siguiente.

$$\int \mathbf{sen^3x.\ cos^2x\ dx}$$

$$\int \text{sen}^3\text{x. cos}^2\text{x dx} = \int \text{senx. sen}^2\text{x cos}^2\text{x dx} = \int \text{senx. }(1 - \cos^2\text{x})\cos^2\text{x dx} \underbrace{=}_{1}$$
$$\int (\text{senx. cos}^2\text{x} - \text{senx. cos}^4\text{x})\ \text{dx} = \frac{-\cos^3\text{x}}{3} + \frac{\cos^5\text{x}}{5} + \text{c}$$

1. Podríamos hacer el cambio cosx = t

7. Calcula la integral siguiente.

$$\int \mathbf{sen^3x.\ cos^5x\ dx}$$

$$\int \text{sen}^3\text{x. cos}^5\text{x dx} = \int \text{senx. sen}^2\text{x cos}^5\text{x dx} = \int \text{senx. }(1 - \cos^2\text{x}).\ \cos^5\text{x dx} \underbrace{=}_{1}$$

$$\int \text{senx.}\cos^5\text{x dx} - \int \text{senx.}\cos^7\text{x dx} = \frac{-\cos^6\text{x}}{6} + \frac{\cos^8\text{x}}{8} + \text{c}$$

1. Podríamos hacer el cambio cosx = t

e. $\int \text{sen}^k\text{x.}\cos^p\text{x dx}$. Si k y p son pares.

Sen2mx = 2.sen mx.cos mx, despejando $\text{sen mx.}\cos\text{mx} = \frac{1}{2}\text{sen2mx}$

8. Calcula la integral siguiente.

$$\int \text{sen}^2\text{x.}\cos^2\text{x dx}$$

$$\int \text{sen}^2\text{x.}\cos^2\text{x dx} = \int \left(\frac{1}{2}\text{sen2x}\right)^2 \text{dx} = \frac{1}{4}\int (\text{sen2x})^2 \text{dx} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1-\cos4\text{x}) \text{ dx}$$

$$= \frac{1}{8}\text{x} - \frac{1}{32}\text{sen4x} + \text{c}$$

9. Calcula la integral siguiente.

$$\int \text{sen}^4\text{x.}\cos^2\text{x dx}$$

$$\int \text{sen}^4\text{x.}\cos^2\text{x dx} = \int \underbrace{\text{sen}^2\text{x}}_{\text{sen}^2\text{x}=\frac{1}{2}(1-\cos2\text{x})} . \underbrace{\text{sen}^2\text{x.}\cos^2\text{x}}_{\left(\frac{1}{2}\text{sen2x}\right)^2} \text{dx} =$$

$$= \int \frac{1}{2}(1-\cos2\text{x}).\left(\frac{1}{2}\text{sen2x}\right)^2 \text{dx} = \frac{1}{8}\int (\underbrace{\text{sen}^2 2\text{x}}_{\text{sen}^2 2\text{x}=\frac{1}{2}(1-\cos4\text{x})} - \text{sen}^2 2\text{x.}\cos2\text{x}) \text{ dx} =$$

$$= \frac{1}{16}\text{x} - \frac{1}{64}\text{sen4x} - \frac{1}{48}\text{sen}^3 2\text{x} + \text{c}$$

f. $\int \text{sen mk.}\cos\text{nx dx}$ $\quad \int \text{sen mk. sen nx dx}$ $\quad \int \cos\text{mk.}\cos\text{nx dx}$

$$\begin{cases} \int \text{sen mk.}\cos\text{nx dx} . \rightarrow \text{sen mk.}\cos\text{nx} = \frac{1}{2}[\text{sen}(\text{m}+\text{n})\text{x} + \text{sen}(\text{m}-\text{n})\text{x}] \\ \int \text{sen mk. sen nx dx} . \rightarrow \text{sen mk. sen nx} = \frac{1}{2}[\text{cosn}(\text{m}-\text{n})\text{x} - \cos(\text{m}+\text{n})\text{x}] \\ \int \cos\text{mk.}\cos\text{nx dx} . \rightarrow \cos\text{mk.}\cos\text{nx} = \frac{1}{2}[\cos(\text{m}+\text{n})\text{x} + \cos(\text{m}-\text{n})\text{x}] \end{cases}$$

10. Calcula la integral siguiente.

$$\int \text{sen2x.}\cos3\text{x dx}$$

$$\int \text{sen2x.}\cos3\text{x dx} = \frac{1}{2}\int \text{sen5x} - \text{senx dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos5\text{x}}{5} + \cos\text{x}\right) + \text{c}$$

11. Calcula la integral siguiente.

$$\int \cos 4x.\cos 3x \ dx$$

$$\int \cos 4x.\cos 3x \ dx = \frac{1}{2}\int (\cos 7x + \cos x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7} + \operatorname{sen} x\right) + c$$

g. $\int \frac{\operatorname{sen}^k x}{\cos^p x}\,dx$ **Si k es 1: es inmediata.**

12. Calcula la integral siguiente.

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$$

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx = \int \underbrace{\cos x}_{f'}.\underbrace{\operatorname{sen}^{-4} x}_{f}\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{-3} x}{-3} + c = \frac{-1}{3\operatorname{sen}^3 x} + c$$

h. $\int \frac{\operatorname{sen}^k x}{\cos^p x}\,dx$ **Si k es impar $\neq 1$**

13. Calcula la integral siguiente.

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x.\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \underbrace{=}_{1} \int \frac{\operatorname{sen} x.(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}\,dx =$$

$$\int \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} - \operatorname{sen} x\right)dx = \int \left(\underbrace{\underbrace{\operatorname{sen} x}_{f'}.\underbrace{\cos^{-2} x}_{f}}_{\text{fórmula 4}} - \operatorname{sen} x\right)dx = \frac{-\cos^{-1} x}{-1} + \cos x + c$$

1. $-\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x(1-\cos^2 x)$

i. $\int \frac{\operatorname{sen}^k x}{\cos^p x}\,dx$ **Si k y p son pares y k $\leq$ p:**

14. Calcula la integral siguiente.

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \tan^2 x\,dx = \int \underbrace{\tan^2 x + 1}_{\text{derivada de la tanx}} - 1\,dx = \tan x - x + c$$

15. Calcula la integral siguiente.

$$\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x} dx$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\int \underbrace{\operatorname{cotan}^2 x}_{f} \underbrace{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}}_{f'} dx = -\frac{\operatorname{cotan}^3 x}{3} + c$$

16. Calcula la integral siguiente.

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x} dx$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{1+\tan^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} = \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \underbrace{\tan^2 x}_{f} \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{f'} dx + \int \underbrace{\tan^4 x}_{f} \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{f'} dx = \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + c$$