

SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.



LÍMITE DE FUNCIONES. CONTINUIDAD.

DOMINIOS. CÁLCULO DE LÍMITES. ESTUDIO DE LA CONTINUIDAD. ASINTOTAS DE UNA FUNCIÓN. TEOREMA DE BOLZANO.

1. DOMINIOS.

El **dominio** de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente (x).

Seguiremos el siguiente esquema:

1. Si la función tiene x en el denominador, hacemos denominador = 0 y resolvemos la ecuación resultante.

El dominio será $\mathbb{R} - \{\text{soluciones denominador} = 0\}$

2. Si la función tiene raíz de índice par, hacemos radicando ≥ 0 y resolvemos la inecuación resultante. El dominio será un intervalo.

3. Si la función tiene un logaritmo de $f(x)$, hacemos $f(x) > 0$ y resolvemos la inecuación resultante. El dominio será un intervalo.

4. Función exponencial, sen y cos.

$$\text{Dom } e^{f(x)} = \text{Dom } f(x)$$

$$\text{Dom } \text{sen } f(x) = \text{Dom } f(x)$$

$$\text{Dom } \text{cos } f(x) = \text{Dom } f(x)$$

1. Estudiar el dominio de las siguientes funciones.

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

b. $f(x) = \frac{x - 1}{x + 3}$

c. $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 9}$

$$d. f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$e. f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + x + 2}$$

$$f. f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 2}$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/VZSkul5l2iE>

$$a. f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1; \begin{cases} 1 \rightarrow \text{no} \\ 2 \rightarrow \text{no}; \text{Dom} = \mathbb{R} \\ 3 \rightarrow \text{no} \end{cases}$$

$$b. f(x) = \frac{x - 1}{x + 3}; \begin{cases} 1 \rightarrow \text{sí} \\ 2 \rightarrow \text{no} \rightarrow x + 3 = 0; x = -3; \text{Dom} = \mathbb{R} - \{-3\} \\ 3 \rightarrow \text{no} \end{cases}$$

$$c. f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 9}; \begin{cases} 1 \rightarrow \text{sí} \\ 2 \rightarrow \text{no}; x^2 - 9 = 0; x = \pm 3; \text{Dom} = \mathbb{R} - \{\pm 3\} \\ 3 \rightarrow \text{no} \end{cases}$$

$$d. f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2}; \begin{cases} 1 \rightarrow \text{sí} \\ 2 \rightarrow \text{no}; x^2 - 3x + 2 = 0; \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \\ 3 \rightarrow \text{no} \end{cases}$$

Dom = $\mathbb{R} - \{1, 2\}$

$$e. f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + x + 2}; \begin{cases} 1 \rightarrow \text{sí} \\ 2 \rightarrow \text{no}; x^2 + x + 2 = 0 (\nexists \text{ solución real}); \text{Dom} = \mathbb{R} \\ 3 \rightarrow \text{no} \end{cases}$$

$$f. f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 2}; \begin{cases} 1 \rightarrow \text{no} \\ 2 \rightarrow \text{no} \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \\ 3 \rightarrow \text{no} \end{cases}$$

2. Estudiar el dominio de las siguientes funciones.

$$a. f(x) = \sqrt[5]{\frac{x + 3}{1 - 2x}}$$

$$b. f(x) = \sqrt{2 - x}$$

$$c. f(x) = \sqrt[4]{\frac{x + 1}{x^2 - 4x + 3}}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/jlkUGq_y18I

$$a. f(x) = \sqrt[5]{\frac{x + 3}{1 - 2x}}; \begin{cases} 1 \rightarrow \text{sí} \\ 2 \rightarrow \text{no}; 1 - 2x = 0; x = \frac{1}{2}; \text{Dom} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \\ 3 \rightarrow \text{no} \end{cases}$$

$$b. f(x) = \sqrt{2 - x}; \begin{cases} 1 \rightarrow \text{no} \\ 2 \rightarrow \text{sí}; 2 - x \geq 0; 2 \geq x; \text{Dom } f(x):]-\infty, 2] \\ 3 \rightarrow \text{no} \end{cases}$$

$$c. f(x) = \sqrt[4]{\frac{x + 1}{x^2 - 4x + 3}}; \begin{cases} 1 \rightarrow \text{sí} \\ 2 \rightarrow \text{sí}; \frac{x + 1}{x^2 - 4x + 3} \geq 0; \\ 3 \rightarrow \text{no} \end{cases}$$

Dom = $[-1, 1) \cup (3, +\infty)$

3. Estudiar el dominio de las siguientes funciones.

$$\text{a. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 1}$$

$$\text{b. } f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x-2}$$

$$\text{c. } f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/OwKDcYyFe1M>

$$\text{a. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 1} \rightarrow \begin{cases} 1 \rightarrow \text{no} \\ 2 \rightarrow \text{sí} \rightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0; (-\infty, 2] \cup [3, +\infty) \\ 3 \rightarrow \text{no} \end{cases}$$

$$\text{Dom } f(x) = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

$$\text{b. } f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}}; \begin{cases} 1 \rightarrow \text{sí} \\ 2 \rightarrow \text{no}; \sqrt[3]{x+1} = 0; x+1 = 0; x = -1; \\ 3 \rightarrow \text{no} \end{cases}$$

$$\text{Dom} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\text{c. } f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}; \begin{cases} 1 \rightarrow \text{sí} \\ 2 \rightarrow \text{sí} \\ 3 \rightarrow \text{no} \end{cases}$$

Tenemos dos condiciones.

Presencia del denominador. $x^2 - 1 = 0; x = \pm 1$

Presencia de la raíz. $x^2 - 1 \geq 0; (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$$\text{Dom } f(x) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

4. Estudiar el dominio de las siguientes funciones.

$$\text{a. } f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+3}}{x+4}$$

$$\text{b. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x+1}$$

$$\text{c. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+3}$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/vr5FB1f13-M>

$$\text{a. } f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+3}}{x+4}; \begin{cases} 1 \rightarrow \text{sí} \\ 2 \rightarrow \text{no} = \mathbb{R} - \{-4\} \\ 3 \rightarrow \text{no} \end{cases}$$

$$\text{b. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x+1} \rightarrow \begin{cases} 1 \rightarrow \text{sí} \\ 2 \rightarrow \text{sí} \\ 3 \rightarrow \text{no} \end{cases}$$

Tenemos dos condiciones.

La presencia de la raíz: $x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$
 $]-\infty, -2] \cup [-2, +\infty[$

La presencia del denominador: $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

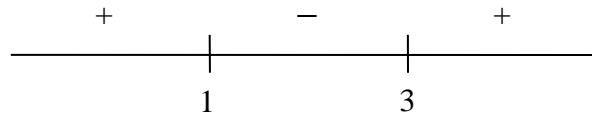
$$\text{Dom } f(x) =]-\infty, -2] \cup [-2, +\infty[- \{-1\}$$

$$\text{c. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+3} \rightarrow \begin{cases} 1 \rightarrow \text{sí} \\ 2 \rightarrow \text{sí} \\ 3 \rightarrow \text{no} \end{cases}$$

Tenemos dos condiciones:

La presencia del denominador: $x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$

La presencia de la raíz: $x^2 - 4x + 3 \geq 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 1$ y $x = 3$
 Estudio del signo



$$]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$$

$$\text{Dom } f(x) =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[- \{-3\}$$

5. Estudiar el dominio de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$

b. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - \frac{x}{x+2}$

VER VÍDEO <https://youtu.be/0uSsy7hkLME>

a. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} \rightarrow \begin{cases} 1 \rightarrow \text{sí} \\ 2 \rightarrow \text{sí} \\ 3 \rightarrow \text{no} \end{cases}$

Tenemos tres condicionantes:

La presencia del denominador.

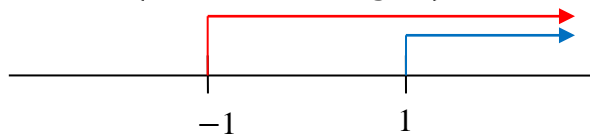
$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \neq 0 \rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 0 \rightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{x-1} \rightarrow x+1 = x-1$$

∅ solución.

La presencia de las raíces.

$$\sqrt{x+1} \rightarrow x+1 > 0 \rightarrow x > -1 \text{ (zona roja de la figura)}$$

$$\sqrt{x-1} \rightarrow x-1 > 0 \rightarrow x > 1 \text{ (zona azul de la figura)}$$



$$\text{Dom } f(x) = [1, +\infty[. \text{ (zona azul y roja de la figura)}$$

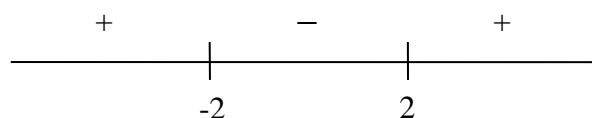
b. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - \frac{x}{x+2} \rightarrow \begin{cases} 1 \rightarrow \text{sí} \\ 2 \rightarrow \text{sí} \\ 3 \rightarrow \text{no} \end{cases}$

Tenemos dos condicionantes:

La presencia del denominador. $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$

La presencia de la raíz. $\sqrt{x^2 - 4} \rightarrow x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$

Estudio del signo



$$]-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$\text{Dom } f(x) = (-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$$

6. Estudiar el dominio de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \ln(x^2 - 9)$

b. $f(x) = \frac{1}{1 - \ln x}$

c. $f(x) = \frac{\log(1 - x)}{2 + \ln x}$

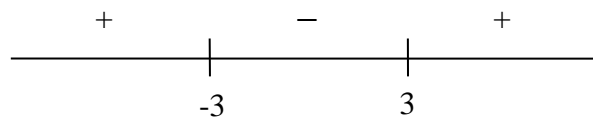
VER VÍDEO <https://youtu.be/Yi80qWnwFA>

$$a. f(x) = \ln(x^2 - 9) \rightarrow \begin{cases} 1 \rightarrow \text{no} \\ 2 \rightarrow \text{no} \\ 3 \rightarrow \text{sí} \end{cases}$$

Lo que hay detrás del logaritmo > 0 .

$$x^2 - 9 > 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3$$

Estudio del signo



$$\text{Dom} = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$$

$$b. f(x) = \frac{1}{1 - \ln x} \rightarrow \begin{cases} 1 \rightarrow \text{sí} \\ 2 \rightarrow \text{no} \\ 3 \rightarrow \text{sí} \end{cases}$$

Tenemos dos condiciones

La presencia del denominador: $1 - \ln x = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e^1 = e$

La presencia del logaritmo: $x > 0$

$$\text{Dom} = (0, \infty) - \{e\}$$

$$c. f(x) = \frac{\log(1 - x)}{2 + \ln x} \rightarrow \begin{cases} 1 \rightarrow \text{no} \\ 2 \rightarrow \text{no} \\ 3 \rightarrow \text{sí} \end{cases}$$

Tenemos tres condiciones:

La presencia del denominador. $2 + \ln x = 0 \rightarrow \ln x = -2 \rightarrow x = e^{-2}$

La presencia de los logaritmos. $\left. \begin{matrix} 1 - x > 0 \rightarrow 1 > x \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow (0, 1)$

$$\text{Dom} = (0, 1) - \{e^{-2}\}$$

7. Calcular los siguientes dominios:

a. $y = 5^{\sqrt{x-1}}$

b. $y = \text{sen}[\ln(x + 2)]$

c. $y = \frac{\sqrt{x+1}}{e^x - 1}$

VER VÍDEO https://youtu.be/HCiWB_Pq4nM

$$a. y = 5^{\sqrt{x-1}}; \text{ solo nos fijamos en } \sqrt{x-1} \rightarrow \begin{cases} 1 \rightarrow \text{no} \\ 2 \rightarrow \text{sí} \rightarrow x - 1 \geq 0; x \geq 1; \\ 3 \rightarrow \text{no} \end{cases}$$

$$\text{Dom}: [1, +\infty[$$

6

b. $y = \text{sen}[\ln(x + 2)]$; solo nos fijamos en $\ln(x + 2) \rightarrow \begin{cases} 1 \rightarrow \text{no} \\ 2 \rightarrow \text{no} \\ 3 \rightarrow \text{sí} \end{cases}$
 $x + 2 > 0; x > -2$; Dom: $(-2, +\infty)$

c. $y = \frac{\sqrt{x + 1}}{e^x - 1} \rightarrow \begin{cases} 1 \rightarrow \text{si} \\ 2 \rightarrow \text{sí} \\ 3 \rightarrow \text{no} \end{cases}$

La presencia del denominador. $e^x - 1 = 0; e^x = 1; x = 0$

La presencia de la raíz. $x + 1 \geq 0; x \geq -1$

Dom: $[-1, +\infty) - \{0\} = [-1, 0) \cup (0, +\infty)$

8. Estudiar el dominio de las siguientes funciones. $y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{x+1}{x^2+3x} & \text{si } -2 < x < 1 \\ e^{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

VER VÍDEO https://youtu.be/FT3MIw_dM1c

$x^2 + 1$	- 2	$\frac{x + 1}{x^2 + 3x}$	1	e^{x+1}
Dom R	Pertenece al dominio	Dom: $R - \{-3, 0\}$ pero el - 3 no está entre $[-2, 1)$	No pertenece al dominio. No está el = a 1	Dom R

Dom: $R - \{0, 1\}$

2. CÁLCULO DE LÍMITES.

a. Límite $x \rightarrow \infty$

Límite de un polinomio. Sustituimos solo en el monomio de mayor grado.

9. Calcula los siguientes límites.

VER VIDEO <https://youtu.be/Aww0iJ3oulw>

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x + 1 = +\infty$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x + 1 = -\infty$

i. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

Por orden de infinitud.

$$\begin{matrix} \text{EXPONENCIAL} & > & \text{POTENCIAL} & > & \text{LOGARÍTMICA} \\ 3^x > 2^x & & x^3 > x^2 & & \log_3 x < \log_2 x \end{matrix}$$

10. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{e^x}$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{\ln x}$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{e^x}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/sbOuwXLfTeU>

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = 0$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = +\infty$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = +\infty$$

Cociente de polinomios. Dividimos numerador y denominador entre la mayor potencia del denominador.

11. Calcula los siguientes límites.

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x + 1}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1}$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x^3}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/ddHDqJA6L1g>

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x + 1} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x} - \frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\infty - 1}{1 + \frac{1}{\infty}} = +\infty$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{2 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x^3} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3}}{\frac{2x^2}{x^3} + \frac{x^3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} + 1} = \frac{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{\frac{2}{\infty} + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

= 0

Otra forma. De cada polinomio nos quedamos solo con el monomio de mayor grado.

12. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x + 1}$
 b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1}$
 c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x^3}$

VER VIDEO <https://youtu.be/JmJhd4lHHyI>

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x + 1} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$
 b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x^3} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$

Otra forma. Por orden de infinitud, comparando el grado del numerador y el denominador. Seguimos la siguiente tabla:

EXPONENCIAL	>	POTENCIAL	>	LOGARÍTMICA
$3^x > 2^x$		$x^3 > x^2$		$\log_3 x < \log_2 x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^k + bx^{k-1} + \dots}{a'x^p + b'x^{p-1} + \dots} = \begin{cases} \text{grado numerador} < \text{grado del denominador} \\ k < p \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^k + bx^{k-1} + \dots}{a'x^p + b'x^{p-1} + \dots} = 0 \\ \text{grado numerador} = \text{grado del denominador} \\ k = p \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^k + bx^{k-1} + \dots}{a'x^p + b'x^{p-1} + \dots} = \frac{a}{a'} \\ \text{grado numerador} > \text{grado del denominador} \\ k > p \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^k + bx^{k-1} + \dots}{a'x^p + b'x^{p-1} + \dots} = \frac{a}{a'} \cdot \infty \end{cases}$$

13. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x + 1}$
 b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1}$
 c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x^3}$

VER VIDEO <https://youtu.be/9MUs0FnYbDw>

En el ejemplo a \rightarrow grado numerador > grado denominador

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x + 1} = \frac{1}{1} \infty = +\infty$

En el ejemplo b \rightarrow grado numerador = grado denominador

$$b. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

En el ejemplo c \rightarrow grado numerador < grado denominador

$$c. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x^3} = 0$$

14. Calcula el límite siguiente de tres formas distintas.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} - x}{3x + 1}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/RDwLUk9qlaY>

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} - \frac{x}{x}}{\frac{3x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} - 1}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} - x}{3x + 1} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2} - x}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2} - 1)x}{3x} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} - x}{3x + 1} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \frac{\sqrt{2} - 1}{3}$$

ii. Indeterminación $\infty - \infty$

Por orden de infinitud.

$$\begin{array}{l} \text{EXPONENCIAL} > \text{POTENCIAL} > \text{LOGARÍTMICA} \\ 3^x > 2^x & x^3 > x^2 & \log_3 x < \log_2 x \end{array}$$

15. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x - x^2$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - x^2$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x - x^2$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$

VER VIDEO <https://youtu.be/2ImfuyOZ8Xg>

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x - x^2 = \infty - \infty (\text{ind.}) = +\infty$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - x^2 = \infty - \infty (\text{ind.}) = -\infty$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x - x^2 = \infty - \infty (\text{ind.}) = +\infty$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = \infty - \infty (\text{ind.}) = +\infty$

Si se puede restar, restamos.

16. Calcula el siguiente límite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/gy6heM7h1S4>

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x} &= \infty - \infty (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - (x-1) \cdot (x^2+1)}{(x-1) \cdot x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - (x^3 + x - x^2 - 1)}{(x-1) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 - x + x^2 + 1}{(x-1) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = 1 \end{aligned}$$

Si hay raíces se multiplica y divide por la expresión conjugada.

17. Calcula el siguiente límite.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x)$$

VER VIDEO <https://youtu.be/RuP12Z7IoZ8>

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) &= \infty - \infty (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{(\sqrt{x^2 - 1} - x) \cdot (\sqrt{x^2 - 1} + x)}^{\text{Identidad notable.}}}{(\sqrt{x^2 - 1} + x)} = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1})^2 - x^2}{(\sqrt{x^2 - 1} + x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{(\sqrt{x^2 - 1} + x)} = \frac{-1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

iii. Indeterminación 1^∞ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^g = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} g \cdot (f-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{exponente} \cdot (\text{base}-1)}$$

18. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+1}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

VER VÍDEO <https://youtu.be/F5WEGDwwDyM>

$$\begin{aligned} \text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+1} &= 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \cdot \left(\frac{x}{x+1} - 1\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \cdot \left(\frac{-1}{x+1}\right)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-1}{x+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} &= 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x} \cdot \left(\frac{x}{x+1} - 1\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x} \cdot \left(\frac{-1}{x+1}\right)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2-1}{x^2+x}} = e^{-1} \end{aligned}$$

b. Límite $x \rightarrow k, k \in \mathbb{R}$

i. Indeterminación $\frac{0}{0}$.

19. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 - x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - x}$

VER VÍDEO <https://youtu.be/WA-iDKsfoLw>

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 - x} = \frac{0}{0} \text{ (ind.)} \stackrel{\text{sacamos x factor común}}{\cong} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \cdot (x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x - 1)} = \frac{1}{-1} = -1$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - x} = \frac{0}{0} \text{ (ind.)} \stackrel{\text{factorizamos numerador y denominador}}{\cong} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{x \cdot (x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$

20. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^3 - 3x - 2}$

VER VÍDEO <https://youtu.be/B81oiQ6upAA>

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0} \text{ (ind.)} \stackrel{\text{factorizamos numerador y denominador}}{\cong} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)}{(x - 1) \cdot (x - 2)} = \frac{3}{-1} = -3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Numerador $(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Denominador $(x - 1) \cdot (x - 2)$

b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^3 - 3x - 2} = \frac{0}{0} \text{ (ind.)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 1)} = \frac{1}{9}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & & 2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Denominador $(x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 1)$

ii. Caso $\frac{k}{0}$.

21. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1}$

b. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x+2}$

VER VÍDEO <https://youtu.be/J-mJvc0kzCs>

$$a. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0} = \pm\infty \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x+2} = \frac{-1}{0} = \pm\infty \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{-}{-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{-}{+} = -\infty \end{cases}$$

b. Indeterminación 1^∞ .

$$\lim_{x \rightarrow k} f^g = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow k} (f-1)g}$$

22. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{4-x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

b. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

$$a. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{4-x} \right)^{\frac{1}{x-2}} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} \right) \cdot \left(\frac{x}{4-x} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} \right) \cdot \left(\frac{2x-4}{4-x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x-2) \cdot (4-x)}} = e^{\frac{2}{2}} = e$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x} \right)^{\frac{1}{x-2}} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} \right) \cdot \left(\frac{2}{x} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} \right) \cdot \left(\frac{2-x}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)}{(x-2) \cdot x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

23. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

b. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}$

$$a. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{0}{0} \text{ (ind.)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2 - 1^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{x-1} = 2$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x}} = \frac{0}{0} \text{ (ind.)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2 - \sqrt{x}) \cdot (2 + \sqrt{x}) \cdot (x + 2\sqrt{x})}{(x - 2\sqrt{x}) \cdot (x + 2\sqrt{x}) \cdot (2 + \sqrt{x})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{[2^2 - (\sqrt{x})^2] \cdot (x + 2\sqrt{x})}{[x^2 - (2\sqrt{x})^2] \cdot (2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x) \cdot (x + 2\sqrt{x})}{[x^2 - 4x] \cdot (\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(4-x) \cdot (x + 2\sqrt{x})}{x(x-4) \cdot (\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \frac{-(4+4)}{4 \cdot (2+2)} = -\frac{1}{2}$$

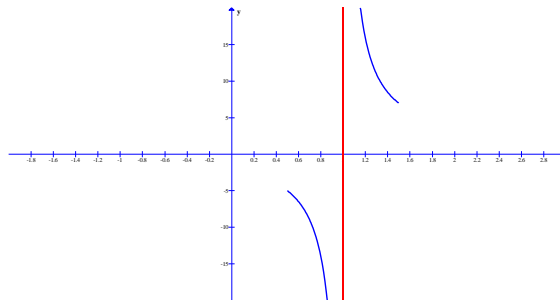
24. Calcula los siguientes límites y haz la interpretación geométrica de los resultados.

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-1}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^3 - 1}$

VER VIDEO <https://youtu.be/qcMO8UWyCml>

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{0} = \pm\infty \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$$



$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^3 - 1} = \frac{(x-1) \cdot (x^2 + 3x)}{(x-1) \cdot (x^2 + x + 1)}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & & 1 & 3 & 0 \\ \hline & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}$$

Numerador $(x-1) \cdot (x^2 + 3x)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Denominador $(x-1) \cdot (x^2 + x + 1)$

25. Calcula los siguientes límites y haz la interpretación geométrica de los resultados.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1}$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 1}$

VER VIDEO <https://youtu.be/7Lapw72vFiY>

a. De tres formas distintas.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (ind.)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (ind.)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (ind.)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1 + \frac{2}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = 1$$

b. De tres formas distintas.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 1} = \frac{-\infty}{+\infty} \text{ (ind.)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 1} = \frac{-\infty}{+\infty} \text{ (ind.)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 1} = \frac{-\infty}{+\infty} \text{ (ind.)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} =$$

$$= \frac{-\infty + 2 - \frac{3}{-\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = -\infty$$

3. CONTINUIDAD.

26. Estudia la continuidad de la siguiente función.

$$y = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x < -3 \\ 2x - 1 & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{x+2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/bzSnfk76Qrg>

$x^2 - 3$	-3	$2x - 1$	1	$\frac{3}{x+2}$
Continua por ser función polinómica.	•	Continua por ser función polinómica.	••	En $x = -2$ se anula el denominador. Pero el $x = -2$ no está en esta zona ($x > 1$) Continua.

$$\bullet \text{ En } x = -3 \left\{ \begin{array}{l} f(-3) = 2 \cdot (-3) - 1 = -7 \\ \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = x^2 - 3 = 6 \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 2x - 1 = -7 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Discontinua de salto}$$

$$\bullet\bullet \text{ En } x = 1 \left\{ \begin{array}{l} f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2x - 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{3}{x+2} = 1 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Continua.}$$

27. Estudia la continuidad de la siguiente función.

$$y = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x + 4} & \text{si } x < -3 \\ 3x - 1 & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x - 2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/ngV0Vy5igSQ>

$\frac{x^2 - 16}{x + 4}$	-3	$3x - 1$	1	$\sqrt{x - 2}$
En $x = -4$ se anula el denominador. Continua en el intervalo excepto en $x = -4$	•	Continua por ser función polinómica.	••	$x - 2 \geq 0; x \geq 2$. Discontinua (1, 2)

$$\bullet \text{ En } x = -3 \left\{ \begin{array}{l} f(-3) = 3 \cdot (-3) - 1 = -10 \\ \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 4} = -7 \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 3x - 1 = -10 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Discontinua de salto}$$

$$\bullet\bullet \text{ En } x = 1 \left\{ \begin{array}{l} f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3x - 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \sqrt{x - 2}; \nexists \end{array} \right\} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Discontinua}$$

28. Dada la siguiente función calcula a y b para que sea continua y represéntala para esos valores de a y b.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{ax + 2b}{x - 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/mjFyou25fvI>

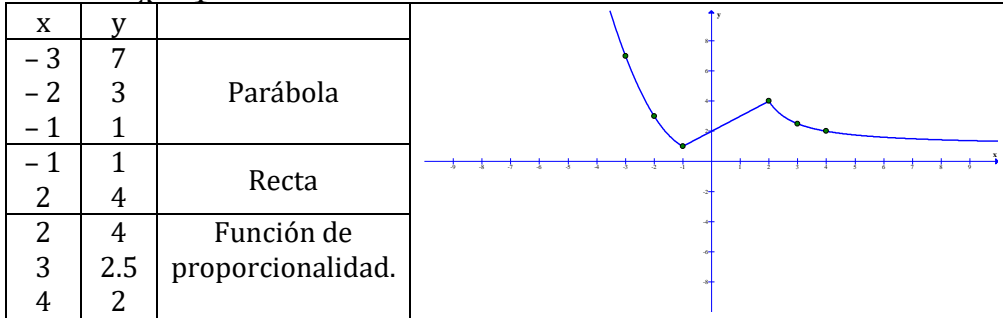
VER VIDEO <https://youtu.be/DNEbHCUTmW0>

$$x = -1 \left\{ \begin{array}{l} f(-1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} ax^2 + bx + 1 = a - b + 1 \rightarrow a - b + 1 = 1; a - b = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} x + 2 = 1 \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

$$x = 2 \begin{cases} f(2) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} x + 2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax + 2b}{x - 1} = 2a + 2b \end{cases} \end{cases} \rightarrow 2a + 2b = 4; a + b = 2$$

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x + 2}{x - 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



29. Dada la siguiente función calcula k para que sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ kx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/S1YnSnnMJDA>

$$x = 1 \begin{cases} f(1) = k + 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = 0 \end{cases} \end{cases} \rightarrow k + 3 = 0; k = -3$$

30. Dada la función, estudia su continuidad y los tipos de discontinuidad que presenta.

$$y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 4x}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/Jag569F9XVI>

$$\text{Dominio } (x^2 - 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}) \rightarrow D = \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

Discontinua en $x = 0$ y $x = 4$. El tipo de discontinuidad lo estudiamos calculando los límites.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - 4x} = \frac{0}{0} \text{ (ind.)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x + 1)}{x(x - 4)} = \frac{-1}{4} \rightarrow \text{Discontinuidad evitable pues el límite de la función en } x = 0 \text{ existe y es real.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x}{x^2 - 4x} = \frac{20}{0} \rightarrow \text{Discontinuidad no evitable. Asintótica, pues el límite da } \frac{k}{0}.$$

31. Dada la función, estudia su continuidad y los tipos de discontinuidad que presenta.

$$y = \frac{x^2 + 3x}{x^3 + 27}$$

VER VIDEO https://youtu.be/81B_8b69Vsg

Dominio ($x^3 + 27 = 0 \rightarrow x = -3$) $\rightarrow D = \mathbb{R} - \{-3\}$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{x^3 + 27} = \frac{0}{0} \text{ (ind.)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(x+3)}{(x^2 - 3x + 9)(x+3)} = \frac{-1}{9} \rightarrow \text{Discontinuidad}$$

evitable pues el límite de la función en $x = -3$ existe y es real.

Factorizar el numerador (sacando factor común) y el denominador (por Ruffini).

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 27 \\ & & -3 & 9 & -27 \\ -3 & 1 & -3 & 9 & 0 \end{array}$$

32. Dada la función, estudia su continuidad y los tipos de discontinuidad que presenta.

$$y = \frac{x^2 + 3x}{x^4 + 27}$$

Dominio ($x^4 + 27 = 0 \rightarrow \nexists \text{ sol. real}$) $\rightarrow D = \mathbb{R}$

La función es continua en todo \mathbb{R} . Las funciones racionales son continuas en su dominio.

33. Hallar a, b y c para que la función sea discontinua en $x = 1$ y $x = 2$, siendo evitable en $x = 2$.

$$y = \frac{x^2 + a}{x^2 + bx + c}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/IuUX9AdTYMg>

Para que sea discontinua en $x = 1$ y $x = 2$ el denominador de la función debe anularse para esos dos valores.

$$\begin{cases} \text{Para } x = 1 \rightarrow 1 + b + c = 0 \\ \text{Para } x = 2 \rightarrow 4 + 2b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$$

Para que sea evitable en $x = 2$ el numerador también debe anularse en este punto.

$$4 + a = 0 \rightarrow a = -4$$

34. La función siguiente representa la valoración de una empresa, en millones de euros, en función del tiempo t en los últimos 13 años.

$$F(t) = \begin{cases} 5 - 0,1 \cdot t & 0 \leq t < 5 \\ a + 0,05 \cdot (t - 5) & 5 \leq t < 10 \\ 4,75 + 0,3 \cdot (t - b) & 10 \leq t \leq 13 \end{cases}$$

a. Calcula el valor de a y b para que la valoración de la empresa sea una función continua del tiempo.

b. ¿Cuál era el valor inicial de la empresa, y el valor a los 13 años?

VER VIDEO <https://youtu.be/FbuVQWNVSuo>

Continua en $t = 5$

18

$$\begin{cases} f(5) = a \\ \lim_{t \rightarrow 5} f(t) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 5^-} 5 - 0,1t = 4,5 \\ \lim_{t \rightarrow 5^+} a + 0,05 \cdot (t - 5) = a \end{cases} \rightarrow a = 4,5 \end{cases}$$

Continua en $t = 10$

$$\begin{cases} f(10) = 4,75 + 0,3 \cdot (10 - b) = 7,75 - 0,3b \\ \lim_{t \rightarrow 10} f(t) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 10^-} a + 0,05 \cdot (t - 5) = a + 0,25 = 4,75 \\ \lim_{t \rightarrow 10^+} 4,75 + 0,3 \cdot (t - b) = 4,75 + 0,3 \cdot (10 - b) \end{cases} ; 7,75 - 0,3b = 4,75 \end{cases}$$

$$b = 10$$

Valor inicial de la empresa: $f(0) = 5$ millones de eurosValor de la empresa a los 13 años: $f(13) = 4,75 + 0,3 \cdot (13 - 10) = 5,65$ millon

35. El tipo de interés anual que ofrece una financiera depende del tiempo que el cliente esté dispuesto a mantener la inversión y viene dada por la función siguiente:

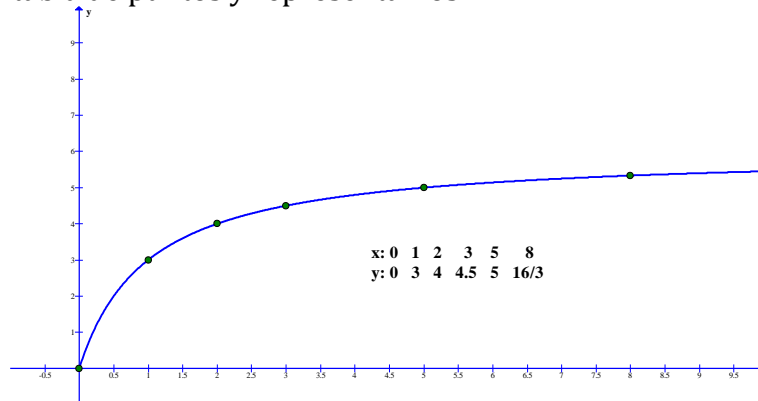
$$I(t) = \frac{6t}{t+1}; t > 0$$

a. Representa la función para un período de 10 años.

b. ¿A qué valor tiende el interés si la inversión se mantiene durante mucho tiempo?

INTERES VER VÍDEO <https://youtu.be/bPtza0fbQQo>

Hacemos una tabla de puntos y representamos.



$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6t}{t+1} = 6, \text{ a largo plazo el interés se estabiliza en } 6.$$

36. La función $p(t)$ muestra como varía la profundidad de la capa de arena de una playa desde la construcción de un dique (p en metros y t en años). Si la profundidad llega a superar los 4 metros se tendrá que elevar el paseo marítimo.

a. Estudia si la profundidad es una función continua del tiempo.

b. A largo plazo ¿hará falta elevar la altura del paseo?

$$p(t) = \begin{cases} 2 + t^2 & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{8t^2 - t - 1}{2t^2} & t > 1 \end{cases}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/ZLq0qTPefTc>

a.

Continua en $t = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} p(1) = 3 \\ \lim_{t \rightarrow 1} p(t) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 1^-} 2 + t^2 = 3 \\ \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{8t^2 - t - 1}{2t^2} = 3 \end{cases} \end{array} \right. \rightarrow \text{Es continua.}$$

b.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{8t^2 - t - 1}{2t^2} = 4$$

A muy largo plazo la capa de arena alcanzaría los 4 metros, luego no hace falta elevar el paseo marítimo

37. En una empresa se hacen montajes en cadena el número de montajes hechos por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función siguiente :

$$M(t) = \frac{30t}{t + 4}; \text{ (t en días).}$$

- a. ¿Cuántos montaje hará al acabar un periodo de entrenamiento de 20 días?
b. Halla la asíntota horizontal y explica su significado.

a. $M(20) = \frac{30 \cdot 20}{20 + 4} = 25$ montajes.

b. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t + 4} = 30$

El límite anterior nos indica que no puede pasar de los 30 montajes por muchas horas que entrene.

38. Considera la función $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ (x+a)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. ¿Para que valores de a la función es continua en $x = 1$?

VER VIDEO <https://youtu.be/sbs1dmj0Pa0>

Continuidad en $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = (1+a)^2 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+a)^2 = (1+a)^2 \end{cases} \end{array} \right\} \overbrace{(1+a)^2 = 1}^{f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)} \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases}$$

3. ASÍNTOTAS.

Verticales: calcula los límites en los puntos excluidos del dominio.
 Horizontales. Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 Oblicuas: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Racional: efectúa la división: } y = \text{cociente} \\ y = mx + n \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx \end{array} \right.$

Funciones racionales: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Horizontal: Si grado numerador} \leq \text{grado denominador} \\ \text{Basta hacer } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \\ \text{Oblicua: Si grado numerador} - \text{grado denominador} = 1 \end{array} \right.$
 Una función no puede tener asíntota horizontal y oblicua.

39. Halla las asíntotas de las funciones siguientes y haz su interpretación geométrica.

a. $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x + 3}$

VER VIDEO <https://youtu.be/UccalmaB8fY>

VER VIDEO <https://youtu.be/jSELizzlb9A>

b. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$

VER VIDEO <https://youtu.be/h3yLK5mdbn0>

a.

Dominio: $x + 3 = 0$; $x = -3$; $D = \mathbb{R} - \{-3\}$

Asíntota vertical. Estudiamos la recta $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x + 1}{x + 3} = \frac{13}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} = \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} = \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$$

Asíntota horizontal. No tiene.

Asíntota oblicua. Sí tiene.

$$y = mx + n \rightarrow \begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 3x} = 1 \\ n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + 3} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 1}{x + 3} = -4 \end{cases}$$

$y = x - 4$

b.

Dominio: $x^2 + 3 = 0$; \nexists sol; $D = \mathbb{R}$

Asíntotas verticales: No hay.

Asíntotas horizontales: sí tiene.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} = 1; x = 1$$

Asíntotas oblicuas: no tiene

40. Halla las asíntotas de las funciones siguientes y haz su interpretación geométrica.

$$\text{a. } f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x + 3}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/rPZDDjn7N7I>

$$\text{b. } f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3}$$

VER VIDEO https://youtu.be/H_CYzwbkazQA

VER VIDEO https://youtu.be/Cujv_mfDz4

a.

Dominio: $x + 3 = 0$; $x = -3$; $D = \mathbb{R} - \{-3\}$

Asíntota vertical: estudiamos la recta $x = -3$

Asíntotas horizontal y oblicua no tiene.

b.

Dominio: $x^2 + 3 = 0$; \nexists sol; $D = \mathbb{R}$

Asíntotas verticales: No hay.

Asíntotas horizontales: no tiene.

Asíntotas oblicuas: sí tiene.

$$y = mx + n \rightarrow \begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 3x} = 1 \\ n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x - 1}{x^2 + 3} = 0 \end{cases}$$

$$y = x$$

41. Halla las asíntotas de la función $f(x)$.

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$$

Dominio: $\mathbb{R} - \{1\}$

Verticales: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0} \rightarrow$ En $x = 1$ hay una asíntota vertical.

Horizontales:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{\infty}{\infty}$ (ind.) = 0; La recta $y = 0$ (eje X) es una asíntota horizontal.

42. Halla las asíntotas de la función $f(x)$.

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

a) El dominio es \mathbb{R} .

No tiene asíntotas verticales.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = 1 \rightarrow$ tiene una asíntota horizontal en $y = 1$

No tiene asíntotas oblicuas.

43. Halla las asíntotas de la función $f(x)$.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Dominio: \mathbb{R}

Verticales: no tiene pues el dominio es \mathbb{R} .

Horizontales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} &= \frac{\infty}{\infty} \text{ (ind.)} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} &= \frac{-\infty}{\infty} \text{ (ind.)} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ La recta } y = 0 \text{ (eje X) es una asíntota horizontal.}$$

Oblicuas no tiene.

44. Halla las asíntotas de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$$

1.- Dominio: $x - 1 = 0$; $x = 1$; $\mathbb{R} - \{1\}$

Verticales: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x - 1} = \frac{1}{0} \rightarrow$ En $x = 1$ hay una asíntota vertical.

Horizontales: no tiene pues el grado del numerador $>$ grado denominador.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x - 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (ind.)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x - 1} = \frac{-\infty}{\infty} \text{ (ind.)} = -\infty$$

Oblicua: Si tiene pues grado numerador - grado denominador = 1.

$$y = mx + n \begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (ind.)} = 1 \\ n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (ind.)} = 1 \end{cases}$$

$y = x + 1$

45. La recta $y = 2x - 1$ es una asíntota oblicua de la función $f(x)$. Hallar el valor de k .

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + k}$$

$$A. \text{ oblicua } \begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + kx} = 2 \\ n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x + k} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2kx - 1}{x + k} = -2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x - 2k \end{cases} \rightarrow -1 = -2k \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

46. La recta $y = 2x - 2$ es una asíntota oblicua de la función $f(x)$. Calcular el valor de k .

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x + k}$$

Asíntota oblicua: $y = mx + n$ $\begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx \end{cases}$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 + 1}{x + k}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + kx} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind}) = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x + k} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 - 2kx}{x + k} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2kx}{x + k} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind}) = -2k$$

La asíntota es: $y = 2x - 2k$

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = 2x - 2k \end{cases} \rightarrow -2 = -2k \rightarrow k = 1$$

47. Halla las asíntotas de la función $f(x)$.

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

Dominio = \mathbb{R}

Verticales: no tiene pues el dominio es \mathbb{R} .

Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0 \rightarrow \text{El eje X es asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$$

No tiene oblicuas.

48. Halla las asíntotas de la función $f(x)$.

$$y = \frac{e^x}{x}$$

Dominio: $x \neq 0$; $D = \mathbb{R} - \{0\}$

Verticales: Estudiamos la recta $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0} \rightarrow \text{El eje Y es asíntota vertical.}$$

Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{0}{-\infty} = 0 \rightarrow \text{el eje X es asíntota horizontal.}$$

49. Halla las asíntotas de la función $f(x)$.

$$y = \frac{x + 1}{L(x + 1)}$$

Dominio: $\begin{cases} L(x+1) = 0; x+1 = e^0; x = 0 \\ x+1 > 0; x > -1 \end{cases} \rightarrow \text{Dom} = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

Verticales: Estudiamos en $x = -1$ y en $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{L(x+1)} = \frac{0}{\ln 0} = 0 \rightarrow$ La función empieza en el punto abierto $(-1, 0)$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{L(x+1)} = \frac{1}{0} \rightarrow$ El eje Y es asíntota vertical.

Horizontales:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{L(x+1)} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x+1 = +\infty$

Oblicuas: $y = mx + n \begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx \end{cases}$

$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{L(x+1)} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x \cdot L(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{L(x+1) + \frac{x}{x+1}} = \frac{1}{\infty} = 0 \rightarrow$ no tiene asíntota oblicua.

50. Halla las asíntotas de la función $f(x)$.

$$f(x) = \frac{L(x+1)}{x+1}$$

1.- Dominio: $\begin{cases} x+1 > 0 \rightarrow x > -1 \\ x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1 \end{cases} \rightarrow D = (-1, +\infty)$

•Verticales:

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{L(x+1)}{x+1} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$. Tiene asíntota vertical $x = -1$.

•Horizontales:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(x+1)}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{x+1}{1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0$.

El eje X es asíntota horizontal.

51. Halla las asíntotas de la función $f(x)$. $y = x \cdot e^x$

Dominio: \mathbb{R}

Verticales: no tiene pues $\text{dom} = \mathbb{R}$

Horizontales:

$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^x = \infty \cdot \infty = \infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = -\infty \cdot 0 (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$.

El eje X es asíntota horizontal en el $-\infty$.

52. Halla las asíntotas de la función $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$.

Dominio: $1 + x + x^2 \geq 0$; $1 + x + x^2 = 0$ ñ sol. $f(0) = 1$; Dom = R
 Verticales no tiene pues Dom. = R

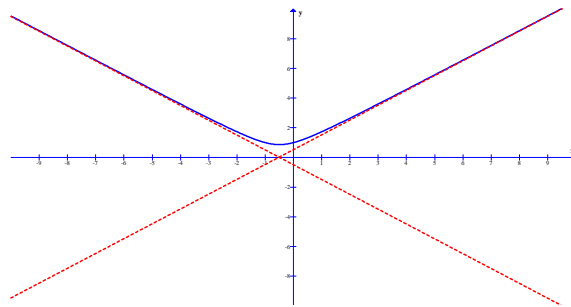
Horizontales: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + x + x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + x + x^2} = +\infty \end{cases}$ No tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas: $y = mx + n$ $\begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + x + x^2}}{x} = 1 \\ n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + x + x^2} - x = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{1 + x + x^2} - x) \cdot (\sqrt{1 + x + x^2} + x)}{\sqrt{1 + x + x^2} + x} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{1 + x + x^2})^2 - x^2}{\sqrt{1 + x + x^2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x}{\sqrt{1 + x + x^2} + x} = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$y = x + \frac{1}{2}$$

Oblicuas: $y = mx + n$ $\begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + x + x^2}}{x} = -1 \\ n = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + x + x^2} + x = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{1 + x + x^2} + x) \cdot (\sqrt{1 + x + x^2} - x)}{\sqrt{1 + x + x^2} - x} = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{1 + x + x^2})^2 - x^2}{\sqrt{1 + x + x^2} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x}{\sqrt{1 + x + x^2} - x} = \frac{-1}{2} \end{cases}$

$$y = -x - \frac{1}{2}$$



5. TEOREMA DE BOLZANO.

VER VIDEO <https://youtu.be/FxOvz1o8eps>

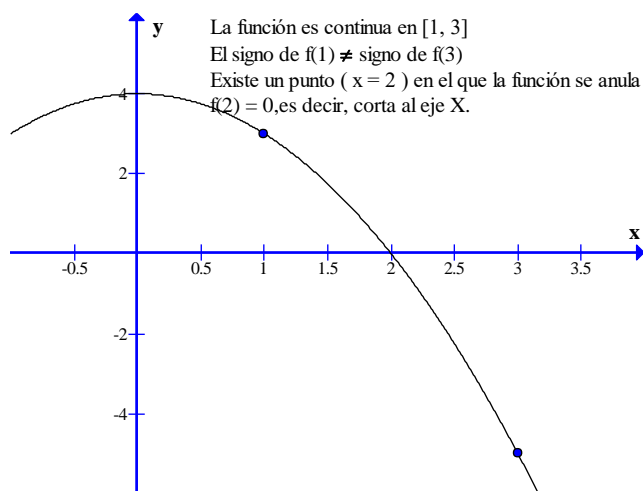
Sea $f(x)$ una función que cumple:

- Es continua en $[a, b]$.
- Signo de $f(a) \neq$ signo $f(b)$.

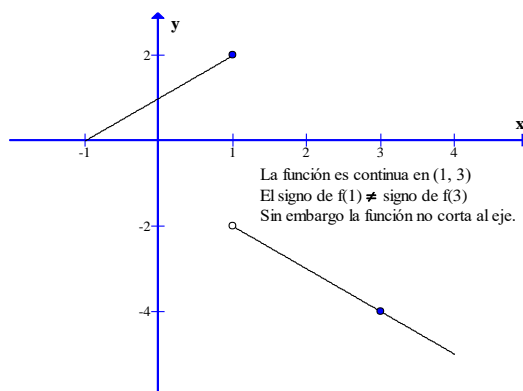
CARLOS ALCOVER GARAU. LICENCIADO EN CIENCIAS QUÍMICAS (U.L.B.) Y DIPLOMADO EN TECNOLOGÍA DE ALIMENTOS (I.A.T.A.).

Entonces existe c perteneciente a (a, b) tal que $f(c) = 0$. $[\exists c \in (a, b)/f(c) = 0]$

Interpretación geométrica del teorema.



La condición de que la función es continua en el cerrado $[a, b]$ en lugar del abierto (a, b) es importante. Veamos un ejemplo.



53. Realizar las siguientes demostraciones.

a. Demostrar que la ecuación $e^x = -x$ tiene al menos una solución. Hallarla con dos cifras decimales exactas.

VER VIDEO https://youtu.be/8_cOyCNc6DI

b. Demostrar que la ecuación $\cos x + x = 0$ tiene al menos una solución.

VER VIDEO <https://youtu.be/Zcjijx4sTFY>

c. Demostrar que la ecuación $\ln x + x = 0$ tiene al menos una solución.

VER VIDEO <https://youtu.be/88tmBXo3CSE>

Sea $f(x) = e^x + x$

Realizamos una tabla de valores.

x	f(x)
-1	$\frac{1}{e} - 1 < 0$

0 | 1

Sea $f(x) = e^x + x$, $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [-1, 0], \text{ por ser suma de continuas.} \\ \text{Signo de } f(-1) \neq \text{signo de } f(0) \\ f(-1) = \frac{1}{e} - 1; f(0) = 1 \end{array} \right.$

Aplicando el teorema de Bolzano podemos afirmar que $\exists c \in (-1, 0) / f(c) = 0$, es decir c es raíz de la ecuación dada.

Buscamos c con dos cifras decimales exactas.

x	-1		-0'6	-0'5			0
f(x)	-		-	+			+

C se encuentra entre $-0'6$ y $-0'5$.

x	-0'6		-0'57	-0'56	-0'55		0'5
f(x)	-		-	+	+		+

C se encuentra entre $-0'57$ y $-0'56$. $C \approx -0'565$.

54. Utilizando el teorema de Bolzano, demostrar que la ecuación $x^2 = x \sin x + \cos x$ tiene al menos dos soluciones dentro del intervalo $[-\pi, \pi]$.

VER VIDEO <https://youtu.be/xmld05m3Pw8>

En funciones trigonométricas recuerda que la variable x viene en radianes.

$x^2 = x \sin x + \cos x \rightarrow x^2 - x \sin x - \cos x = 0 \rightarrow$ Definimos $f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x$.

Veamos que $f(x)$ tiene dos soluciones en el intervalo dado.

$f(x)$ es continua en $[-\pi, 0]$ por ser suma de f continuas. $\left. \begin{array}{l} f(-\pi) = \pi^2 + 1 > 0 \\ f(0) = -1 < 0 \end{array} \right\} \text{signo } f(-\pi) \neq \text{signo de } f(0) \left. \vphantom{\begin{array}{l} f(-\pi) = \pi^2 + 1 > 0 \\ f(0) = -1 < 0 \end{array}} \right\}$ Según el teorema de Bolzano,

$\exists c \in \frac{-\pi, 0}{f(c)} = 0 \rightarrow c$ es solución de $x^2 = x \sin x + \cos x$ que pertenece a $[-\pi, \pi]$.

$f(x)$ es continua en $[0, \pi]$ por ser suma de f continuas. $\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0 \end{array} \right\} \text{signo } f(0) \neq \text{signo de } f(\pi) \left. \vphantom{\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0 \end{array}} \right\}$ Según el teorema de Bolzano,

$\exists d \in (0, \pi) / f(d) = 0 \rightarrow d$ es solución de $x^2 = x \sin x + \cos x$ perteneciente a $[-\pi, \pi]$.

Por tanto, c y d son soluciones de $x^2 - x \sin x - \cos x$ pertenecientes a $[-\pi, \pi]$.

55. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x + 1; & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + \ln x; & \text{si } x > 1 \end{cases}$, demostrar que se puede aplicar el teorema de Bolzano a dicha función en el intervalo $[-2, 2]$. Hallar el valor que predice el teorema.

VER VIDEO <https://youtu.be/AihRW6FTfuY>

Veamos que la función dada cumple las hipótesis del teorema en el intervalo dado. Continua. Ambas funciones son continuas en sus intervalos de definición. Veamos que ocurre en $x = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 + x = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 + \ln x = 2 \end{cases} \rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \text{Es continua en } x = 1 \end{array} \right.$$

Toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(-2) = -1 < 0 \\ f(2) = 2 + \ln 2 > 0 \end{array} \right. \rightarrow \text{Se verifica la segunda hipótesis.}$$

Según el teorema de Bolzano existe un c perteneciente a $(-2, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

$$\text{Hallamos } c. x + 1 = 0 \rightarrow x = -1. c = -1$$

56. Sea a un valor estrictamente positivo. Consideremos la función polinómica dependiente de a : $f(x) = x^3 + a \cdot x + 1$. Demostrar que existe una solución entre -1 y 0 .

VER VIDEO <https://youtu.be/sw43T8BPfnl>

$f(x)$ es continua en $[-1, 0]$
 signo $f(-1) = -a \neq$ signo $f(0) = 1$ } Según el T. de Bolzano $\exists c \in (-1, 0) / f(c) = 0$, es decir, c es solución de la ecuación $x^3 + a \cdot x + 1 = 0$.

57. Sea a un valor real que está estrictamente entre -1 y 1 . Definimos la función siguiente dependiente de a : $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + a \cdot x^2 + x - 3$. Demostrar que la función anterior se anula para un valor de x .

VER VIDEO <https://youtu.be/0ARQ8urBzVE>

Realizamos una tabla de valores.

x	$f(x)$
0	$-3 < 0$
1	$a - 5/3 < 0$
2	$4a + 5/3$ no sabemos su signo
3	$9a + 9 > 0$

$f(x)$ es continua en $[1, 3]$ por ser función polinómica.
 $\left. \begin{array}{l} f(1) < 0 \\ f(3) > 0 \end{array} \right\}$ según el Teorema de Bolzano

$$\exists c \in (1, 3) / f(c) = 0 \rightarrow \frac{1}{3}c^3 + a \cdot c^2 + c - 3 = 0 \rightarrow c \text{ es solución de } f(x).$$

58. Demostrar que la función polinómica $f(x) = x^3 - 3x + \sqrt{2}$ tiene solución en el intervalo $[0, 1]$.

VER VIDEO <https://youtu.be/qm7y7Ighqcs>

Veamos si $f(x)$ tiene alguna solución en $[0, 1]$.

$f(x)$ es continua en $[0, 1]$, por ser función polinómica.
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{signo } f(0) > 0 \\ \text{distinto del signo } f(1) < 0 \end{array} \right. \rightarrow$ Aplicando el teorema de Bolzano podemos afirmar que $\exists c \in (0, 1) / f(c) = 0$, es decir, c es solución de $f(x)$.

59. Considerar la ecuación $x^3 + \lambda x^2 - 2x = 1$ donde λ es una constante mayor que 2 . Probar que la ecuación admite solución no negativa más pequeña que 1 .

VER VIDEO <https://youtu.be/KB7tRnMsufA>

Veamos que la ecuación tiene solución entre 0 y 1

$$x^3 + \lambda x^2 - 2x = 1 \rightarrow x^3 + \lambda x^2 - 2x - 1 = 0.$$

$$\text{Sea } f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 2x - 1, \begin{cases} f(x) \text{ es continua en } [0, 1], \text{ por ser función polinómica.} \\ \text{Signo de } f(0) \neq \text{signo de } f(1) \\ f(0) = -1; f(1) = \lambda - 2 \stackrel{\lambda > 2}{>} 0 \end{cases}$$

Aplicando el teorema de Bolzano podemos afirmar que $\exists c \in (0, 1)/f(c) = 0$, es decir c es solución de la ecuación $x^3 + \lambda x^2 - 2x = 1$.

60. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $[a, b]$. Cumplen que $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$. Probar que estas dos funciones se cortan en algún punto del intervalo dado.

VER VIDEO <https://youtu.be/a582rIUfC5M>

Demostramos que existe un punto del intervalo dado donde $f(x) = g(x) \rightarrow$

$$f(x) - g(x) = 0. \text{ Definimos } h(x) = f(x) - g(x)$$

$\left\{ \begin{array}{l} h(x) \text{ es continua en } [a, b], \text{ por ser resta de funciones continuas.} \\ h(a) = f(a) - g(a) < 0, \text{ pues } f(a) < g(a) \\ h(b) = f(b) - g(b) > 0, \text{ pues } f(b) > g(b) \end{array} \right. \rightarrow$ Según el

teorema de Bolzano existe $c \in (a, b)/f(c) = 0$. Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en c .

61. La función $y = \tan x$ toma valores de distinto signo en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ y sin embargo no corta al eje de las X en él. ¿Contradice este hecho el Teorema de Bolzano?

VER VIDEO <https://youtu.be/x0mD5hniJmY>

Si cumpliendo una de las dos hipótesis (la 2ª) no cumple la tesis, no se contradice el teorema, lo que ocurre es que no se cumple la otra hipótesis, pues, la función no es continua en el intervalo dado. Es discontinua en $x = \frac{\pi}{2}$

62. Determinar aplicando el T. de Bolzano si el polinomio $x^4 - 4x^2 - 1$ tiene alguna raíz real negativa.

VER VIDEO <https://youtu.be/c5lSrkwG-aw>

Realizamos una tabla de valores.

x	f(x)
0	-1
-1	-4
-2	-1
-3	68

$$\text{Sea } f(x) = x^4 - 4x^2 - 1, \begin{cases} f(x) \text{ es continua en } [-3, -2], \text{ por ser función polinómica.} \\ \text{Signo de } f(-3) \neq \text{signo de } f(-2) \\ f(-3) = 68; f(-2) = -1 \end{cases}$$

Aplicando el teorema de Bolzano podemos afirmar que $\exists c \in (-3, -2)/f(c) = 0$, es decir c es raíz negativa de la función $f(x)$.

63. Utilizando el teorema de Bolzano, probar que la ecuación $\tan x = 2x$ tiene una raíz real en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

VER VIDEO <https://youtu.be/yHppGANBG1o>

En funciones trigonométricas recuerda que la variable x viene en radianes.

$\tan x = 2x \rightarrow \tan x - 2x = 0$. Definimos $f(x) = \tan x - 2x$.

Veamos si $f(x)$ tiene solución en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$:

$f(x)$ es continua en $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ por ser suma de funciones continuas en dicho intervalo.

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 + \frac{\pi}{2} > 0$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0 \rightarrow$ signo de $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq$ signo de $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Aplicando el teorema de Bolzano podemos afirmar que $\exists c \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) / f(c) = 0$. Es decir, c es una solución real, perteneciente al intervalo dado, de la ecuación dada.