SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

APLICACIÓN DE LA DERIVADA.

OPTIMIZACIÓN. RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL. DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS O COEFICIENTES DE UNA FUNCIÓN. REGLA DE L'HOPITAL. TEOREMA DE ROLLE, TEOREMA DEL VALOR MEDIO O TEOREMA DE LAGRANGE.

1. OPTIMIZACIÓN.

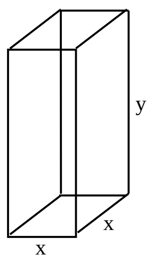
Para realizar un ejercicio de optimización seguiremos el siguiente guión:

1. **Función a optimizar. ¿Qué debe ser máximo o mínimo?**
2. **Relación entre variables**
3. **Sustituyo 2 en 1**
4. **Derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación resultante.**
5. **Comprobamos.**

1. Calcular las dimensiones de una caja con las dos tapas de base cuadrada de volumen 64 m^3 de superficie mínima. Compruebe que la solución obtenida es un mínimo.

VER VIDEO https://youtu.be/vl0ZTGnlU7c

1. Función a optimizar. $S = 2x^2 + 4xy$



2. Relación entre variables: $V = x^2y = 64$; $y = 64/x^2$

3. Sustituir 2 en 1.

$$S = 2x^2 + 4x\frac{64}{x^2} = 2x^2 + \frac{256}{x}$$

4. Derivar, igualar a cero y resolver.

$$S' = 4x - \frac{256}{x^2} = 0 \rightarrow x^3 = 64 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = \frac{64}{4^2} = 4$$

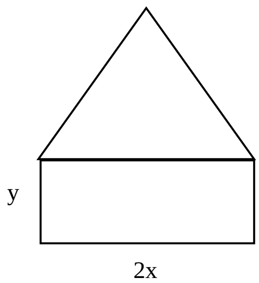
5. Comprobar.

S'(3) < 0 → decrece	4	S'(5) >0 → crece

Se confirma un mínimo de superficie.

2. Hemos de diseñar una ventana en forma de polígono ACEDB, de 30 m. de perímetro. Se trata de un rectángulo con un triángulo equilátero encima. Calcular las dimensiones del rectángulo para que el área de la ventana sea máxima.

VER VIDEO https://youtu.be/g1v-t23aQhw



1. Función a optimizar:

$$h_{\text{triángulo}} = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x \rightarrow A = 2xy + \frac{1}{2}2\sqrt{3}x^2 = 2xy + \sqrt{3}x^2$$

2. Relación entre variables.

Per. = 30 → 30 = 2x + y + 2x + 2x + y = 6x + 2y → 15 = 3x + y → y = 15 – 3x

3. Sustituir 2 en 1

$$A = 2x(15 - 3x) + \sqrt{3}x^2 = 30x - 6x^2 + \sqrt{3}x^2$$

4. Derivo, igualo a cero y resuelvo la ecuación resultante.

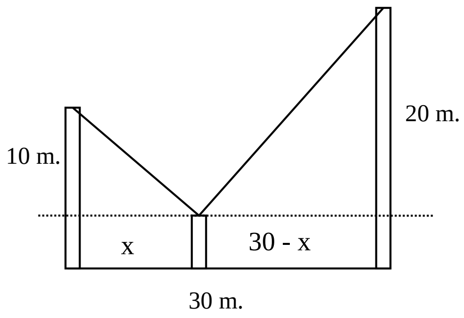
$$A' = 30 - 12x + 2\sqrt{3}x = 0 \rightarrow x = \frac{30}{12 - 2\sqrt{3}} \rightarrow \text{Base} = 2x = 7{,}029 \rightarrow y = 4{,}46$$

5. Comprobar

f'(3) > 0 → crece	3,51	f'(4) < 0 → decrece

3. Entre dos torres de 15 y 25 metros de altura, respectivamente, hay una distancia de 30 metros. En medio de las dos torres tenemos que poner otra torreta de 5 metros de altura y tenemos que extender un cable que una los extremos de la parte de arriba de la primera torre con la torreta y los extremos de la parte de arriba de esta con la segunda torre. ¿Dónde tenemos que situar la torreta de 5 metros para que la longitud total del cable sea mínima? ¿cuánto vale la longitud del cable en este caso?

VER VIDEO https://youtu.be/bsy05okmFGE



1. Función a optimizar.

$L = \sqrt{100 + x^2} + \sqrt{400 + (30 - x)^2}$

2. Derivo, igualo a cero y resuelvo.

$$L' = \frac{2x}{2\sqrt{100 + x^2}} + \frac{-2(30 - x)}{2\sqrt{400 + (30 - x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{100 + x^2}} + \frac{-(30 - x)}{\sqrt{400 + (30 - x)^2}} = 0$$

Resolviendo obtenemos x = 10 m.

3. Comprobar.

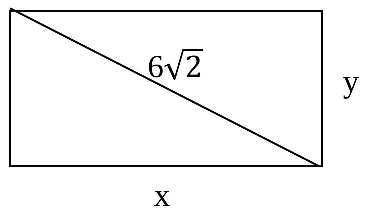
$f'(9) < 0 \rightarrow$ decrece	10	$f'(11) > 0 \rightarrow$ crece

Confirma un mínimo.

La longitud del cable será L(10) = 42,43 m.

4. De todos los rectángulos de diagonal $6\sqrt{2}$, determinar el rectángulo de perímetro máximo.

VER VIDEO. https://youtu.be/IQfuUZ6nr5U



1. Función a optimizar: $P = 2x + 2y$
2. Relación entre variables: $x^2 + y^2 = (6\sqrt{2})^2 \rightarrow x = \sqrt{72 - y^2}$
3. Sustituir 2 en 1 $P = 2\sqrt{72 - y^2} + 2y$
4. Derivar, igualar a cero y resolver.

$$P' = \cancel{2}\frac{-2y}{\cancel{2}\sqrt{72 - y^2}} + 2 = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow x = 6$$

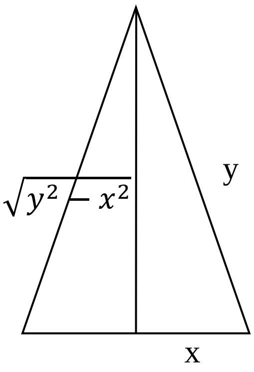
5. Comprobar.

P'(5)>0	6	P'(7)<0

Se confirma un máximo del perímetro.

5. Dar el triángulo isósceles de perímetro 9 cm. que tiene área máxima.

VER VIDEO. https://youtu.be/Lc_7MzITMTY



1. Función a optimizar: $A = \frac{2x \cdot \sqrt{y^2 - x^2}}{2} = x \cdot \sqrt{y^2 - x^2}$

2. Relación entre variables. $2x + 2y = 9 \rightarrow y = 4{,}5 - x$

3. Sustituir 2 en 1.

$A = x \cdot \sqrt{y^2 - x^2} = x \cdot \sqrt{(4{,}5 - x)^2 - x^2} = \sqrt{20{,}25x^2 - 9x^3}$

4. Derivo, igualo a cero y resuelvo.

$A' = \frac{40{,}5x - 27x^2}{2\sqrt{20{,}25x^2 - 9x^3}} = 0 \rightarrow 40{,}5x - 27x^2 = 0 \rightarrow x = 1{,}5 \rightarrow \text{base} = 3 \rightarrow y = 3$

5. Comprobar.

A'(1,4) > 0 CRECE	1,5 CONFIRMA MÁXIMO	A' (1,6) < 0 DECRECE

Se trata de un triángulo equilátero.

6. Se quiere construir una caja rectangular sin tapa en la parte superior y de base cuadrada con 108 dm^2 de material. ¿Cuáles han de ser las dimensiones de la caja para que el volumen sea máximo?

VER VIDEO https://youtu.be/yzUFDywmaD8

1. Función a optimizar: volumen máximo, $f(x,y) = x^2.y$
2. Relación entre variables: superficie igual 108, $x^2 + 4xy = 108$,

$$y = \frac{108 - x^2}{4x}$$

3. $f(y) = x^2.\frac{108 - x^2}{4x} = \frac{1}{4}(108x - x^3)$

4. Derivamos, igualamos a cero y resolvemos.

$$f'(x) = \frac{1}{4}(108 - 3x^2) = 0 \rightarrow x = \pm 6 \rightarrow \text{tomamos } x = 6 \rightarrow y = \frac{108 - x^2}{4x} = 3$$

5. Comprobamos.

f'(5) > 0 → crece	6	f'(6) < 0 → decrece

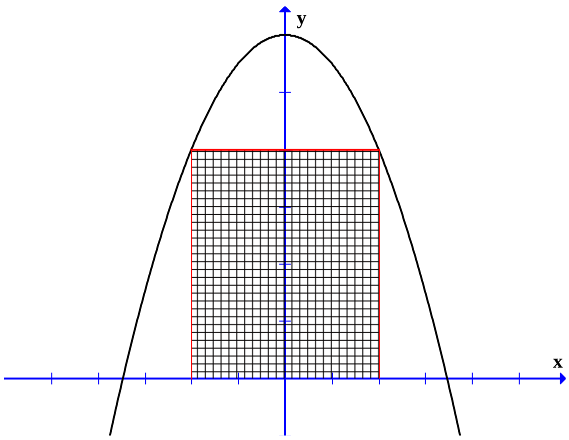
Confirma la existencia de un máximo del volumen para x = 6 e y = 3.

7. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ determinar el valor de c qué verifica que la pendiente de la recta tangente de f(x) en x = c es mínima.

VER VIDEO https://youtu.be/eFBKqpc2aNA

La pendiente en $x = c$ es $m = f'(c)$
Para que la pendiente sea mínima se debe cumplir $m' = 0$, es decir, $f''(x) = 0$
$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, y $m' = f''(x) = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow m''(1) = 6 > 0$ confirma un mínimo.

8. Calcula el rectángulo de área máxima que tiene la base situada en el eje de abscisas, y los otros dos vértices con coordenada positiva situados en la parábola $y = 12 - x^2$.
VER VÍDEO https://youtu.be/fpnRTVujCSc



1. Función a optimizar: A = 2x.y
2. Relación entre variables: $y = 12 - x^2$
3. Sustituyo **2** en **1**: $A = 2x.(12 - x^2) = 24x - 2x^3$
4. Derivo, igualo a cero y resuelvo la ecuación: $A' = 24 - 6x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow$ $y = 12 - 2^2 = 8$. Un rectángulo de base 4 y altura 8.
5. Compruebo: Estudio el signo de A'

$A'(1'9) > 0 \rightarrow$ crece	2	$A'(2'1) < 0 \rightarrow$ decrece

Confirma un rectángulo de área máxima para x = 2.

9. De todos los rectángulos de perímetro 48 calcular las dimensiones del que tenga la diagonal más pequeña.
VER VÍDEO https://youtu.be/ayfp6dycFbM

1. Función a optimizar: diagonal mínima, $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. Relación entre variables: perímetro 48 m. $2x + 2y = 48 \rightarrow x + y = 24 \rightarrow$ $x = 24 - y$

3. $f(y) = \sqrt{(24 - y)^2 + y^2} = \sqrt{576 - 48y + 2y^2}$

4. Derivamos, igualamos a cero y resolvemos.

$$f'(x) = \frac{-48 + 4y}{2\sqrt{576 - 48y + 2y^2}} = 0 \rightarrow -48 + 4y = 0 \rightarrow y = 12 \rightarrow x = 24 - 12 = 12$$

5. Comprobamos.

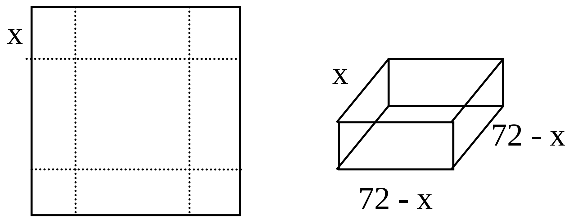
$F'(11) < 0 \rightarrow$ decrece	12	$F'(13) > 0 \rightarrow$ crece

Confirma la existencia de un mínimo de la diagonal para x = 12 e y = 12.

10. Descomponer el número 123 en dos sumandos positivos de manera que el producto del primer sumando por el cuadrado del segundo sea máximo.

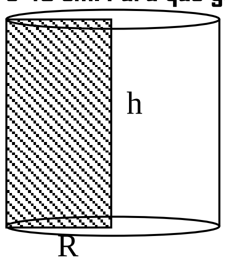
1.- Función a optimizar: $f(x,y) = x.y^2$
2.- Relación entre variables: $x + y = 123 \rightarrow x = 123 - y$
3.- Función a optimizar dependiente de una variable: $f(x,y) = x.y^2 = (123 - y).y^2$
$f(x,y) = 123y^2 - y^3$
4.- Derivo igualo a cero y resuelvo la ecuación resultante. $f' = 246y - 3.y^2 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} \cancel{y = 0} \\ y = 82 \end{cases} \rightarrow y = 82 \rightarrow x = 41$
5.- Comprobación. $f'' = 246 - 6y \rightarrow f''(82) < 0$, se confirma un máximo.

11. Se quiere construir una caja abierta (sin tapa) recortando cuadrados iguales en cada una de las esquinas de una hoja de cartón cuadrada de 72 cm. de lado. ¿Calcula la longitud del lado del cuadrado que se ha de recortar para obtener una caja de volumen máximo?
VER VIDEO https://youtu.be/Zch7p4VDcb4



1.- Función a optimizar. (¿Qué debe ser máximo?) $V = x.(72 - x)^2$.
2.- Derivo, igualo a cero y resuelvo. $V = 5184x - 144x^2 + x^3$.
$V' = 5184 - 288x + 3x^2 = 0 \rightarrow x = 72$ y $x = 24 \rightarrow$ tomamos $x = 24$.
3.- Comprobamos. $V'' = -288 + 6x \rightarrow V''(24) < 0 \rightarrow$ máximo.

12. Si hacemos girar un rectángulo sobre uno de sus lados generamos un cilindro. Calcula las dimensiones de un rectángulo de perímetro 40 cm. Para que genere un cilindro de volumen máximo.



1.- Función a optimizar: $V = \pi.R^2.h$
2.- Relación entre variables: $2h + 2R = 40 \rightarrow h = 20 - R$
3.- $V = \pi.R^2.(20 - R) = 20.\pi.R^2 - \pi.R^3$
4.- $V' = 40.\pi.R - 3.\pi.R^2 = 0 \rightarrow R = \frac{40}{3}$ cm. $\rightarrow h = 20 - R = \frac{20}{3}$ cm.
5.-

$V'(13) > 0 \rightarrow$ crece	40/3	$V'(14) < 0 \rightarrow$ decrece

Confirma la existencia de un máximo del volumen para $R = 40/3$ y $h = 20/3$.

13. De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 15 cm, halla las dimensiones del que tiene área máxima.

1.- Función a optimizar: A = b.h
2.- Relación entre variables: b + h = 15 → b = 15 – h
3.- A = (15 – h).h = 15.h – h^2
4.- A' = 15 – 2h = 0 → h = 7'5 cm. → b = 7'5 cm.
5.-

A'(7) > 0 → crece	40/3	V'(8) <0 → decrece

Confirma la existencia de un máximo del área para h = 7'5 cm. y b = 7'5 cm.

14. Hallar las dimensiones (altura h y radio de la base, r) de un cono recto de volumen máximo, sabiendo que la altura más el radio de la base vale 12 m.

1.- Función a optimizar: V = 1/3 π.R^2.h
2.- Relación entre variables: b + h = 15 → b = 15 – h
3.- A = (15 – h).h = 15.h – h^2
4.- A' = 15 – 2h = 0 → h = 7'5 cm. → b = 7'5 cm.
5.-

A'(7) > 0 → crece	40/3	V'(8) <0 → decrece

Confirma la existencia de un máximo del área para h = 7'5 cm. y b = 7'5 cm.

15. Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13,5 metros cúbicos. Para ello se dispone de chapa de acero de grosor uniforme. Calcular las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el menor posible.

1.- Función a optimizar: S = x^2 + 4.x.y
2.- Relación entre variables: V = x^2.y = 13'5 → y = 13'5/x^2
3.- $S = x^2 + \frac{4.x.13'5}{x^2} = x^2 + \frac{4.13'5}{x}$
4.- $S' = 2x - \frac{54}{x^2} = 0 \rightarrow x = 3\text{ m.} \rightarrow y = 1'5\text{ m.}$
5.-

S'(2) < 0 → decrece	3	S'(4) >0 → crece

Confirma la existencia de un mínimo del gasto en chapa para x = 3 m. e y = 1'5 m.

16. Un alambre de 100 cm. de longitud, se corta en dos partes formando con una de ellas un círculo y con la otra un cuadrado. Cómo debe ser cortado el alambre para que:

a. La suma de las áreas de las dos figuras sea máxima.
b. La suma de las áreas de las dos figuras sea mínima.

1.- Función a optimizar: $S = \pi x^2 + y^2$

2.- Relación entre variables: $2.\pi.x + 4y = 100 \rightarrow \pi.x + y = 50 \rightarrow y = 50 - \pi x$

3.- $S = \pi x^2 + (50 - \pi x)^2 = \pi.x^2 + 2500 - 100.\pi.x + \pi^2 \cdot x^2$

4.- $S' = 2.\pi.x - 100.\pi + 2.\pi^2.x = 0 \rightarrow x = \frac{100\pi}{2.\pi.(1+\pi)} = \frac{100}{2.(1+\pi)} \approx 12'07cm. = y$

5.-

$S'(12) < 0 \rightarrow$ decrece	12'07	$S'(13) > 0 \rightarrow$ crece

Confirma la existencia de un mínimo de la suma de áreas. para x = 12'07 cm. = y
La función S solo presenta un extremo (mínimo). Para hallar las dimensiones que hacen máxima la suma de áreas tendríamos que tomar la función en los extremos de su dominio. Que solo haya círculo o que solo haya cuadrado.
Solo círculo sería: $2.\pi.x = 100 \rightarrow x = 15'92$ cm. $\rightarrow$ Área = 795.77 cm^2
Solo cuadrado sería: $4.y = 100 \rightarrow y = 25$ cm. $\rightarrow$ Área = 25^2 = 625 cm^2.
El área máxima sería tomar todo el alambre parta hacer un círculo.

17. El propietario de un inmueble tiene alquilados los cuarenta pisos del mismo a 1.000 € al mes cada uno. Por cada 100 € de aumento en el precio del alquiler pierde un inquilino, que se traslada a otro piso más económico. ¿Cuál es el alquiler que más beneficio produce al propietario?

Número de pisos	alquiler	total
40	1000	40000
39	1100	42900
38	1200	45600
…	…	…
40 – x	1000 + 100x	(40 – x).(1000 + 100x)

1.- Función a optimizar: $B = (40 - x).(1000 + 100x) \rightarrow$
$\rightarrow B = 40000 + 3000.x - 100x^2$

4.- $B' = 3000 - 200.x = 0 \rightarrow x = 15$.

5.-

$B'(14) > 0 \rightarrow$ crece	15	$B'(16) < 0 \rightarrow$ decrece

Confirma un máximo en el beneficio para x = 15. Sube el alquiler hasta 2500€, tendrá 25 inquilinos y unos ingresos de 62500€.

18. Una piedra preciosa pesa 12 gramos. Sabiendo que el valor de una piedra preciosa es proporcional al cuadrado de su peso y que su valor es de 1440 €, calcula, cuando dicha piedra se divide en dos trozos, el valor de cada uno de ellos cuando la depreciación sea máxima.

1.- Función a optimizar: $f = k.x^2 + k.(12 - x)^2$ F es el valor de la piedra una vez partida. Si buscamos el mínimo de f tendremos la máxima depreciación.

4.- f' = 2.k.x + 2.k.(12 – x) = 0 → x = 6

5.-

f'(5) < 0 → decrece	6	f'(7) >0 → crece

Confirma un mínimo de f (valor de la piedra partida), es decir, un máximo de depreciación.

19. ¿Qué puntos de la gráfica de $y = 4 - x^2$ están más cerca del punto Q = (0,2)?

Sea P = (x, y) un punto cualquiera de la gráfica. La distancia de P a Q es $|\overrightarrow{QP}|$

1.- Función a optimizar: $d = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$

2.- Relación entre variables: $y = 4 - x^2 \rightarrow x^2 = 4 - y$

3.- $d = \sqrt{4 - y + (y-2)^2} = \sqrt{y^2 - 5y + 8}$

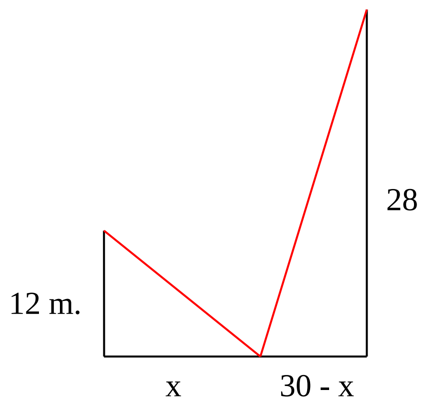
4.- $d' = \frac{2y-5}{2\sqrt{y^2-5y+8}} = 0 \rightarrow y = \frac{5}{2} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

5.-

d'(2) < 0 → decrece	5/2	d'(3) >0 → crece

Confirma que los puntos $P = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ y $P = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ están a distancia mínima de Q.

20. Dos postes de 12 y 28 metros de altura, distan 30 metros entre sí. Hay que conectarlos mediante un cable que este atado en algún punto del suelo entre los postes. ¿En qué punto ha de amarrarse al suelo con el fin de utilizar la menor longitud de cable posible?



1.- Función a optimizar: $l = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{(30-x)^2 + 784}$

4.- $l' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+144}} + \frac{-2.(30-x)}{2\sqrt{(30-x)^2+784}} = 0 \rightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+144}}\right)^2 = \left(\frac{(30-x)}{\sqrt{(30-x)^2+784}}\right)^2 \rightarrow$

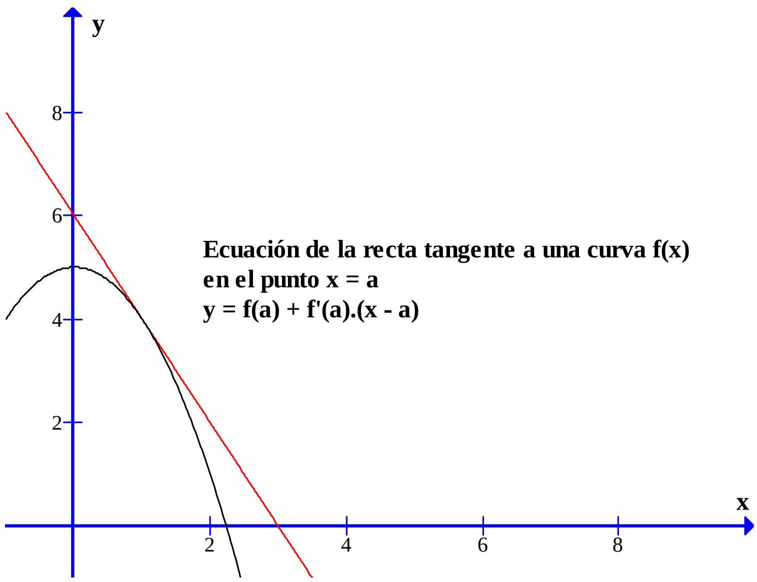
$\rightarrow \begin{cases} x = 21 \\ x = 52'5 \text{ no es válida.} \end{cases}$

5.-

d'(20) < 0 → decrece	21	d'(22) >0 → crece

Confirma que la menor longitud del cable se da con x = 21 m. El cable medirá 53'6 m.

2. RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL.



Hay 5 modelos básicos de ejercicios. Primero mira al menos 1 de cada modelo.

a. Me dan la función en forma explícita y la x del punto de tangencia.

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 2x + 1$ en el punto x = 3
VER VIDEO https://youtu.be/1CtrNCjwG9I

$y = f(a) + f'(a).(x - a)$

$$y = f(3) + f'(3).(x - 3)\begin{cases} f(3) = 3^2 - 2.3 + 1 = 4 \\ f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f'(3) = 2.3 - 2 = 4 \end{cases} \rightarrow y = 4 + 4.(x - 3)$$

$y = 4x - 8$

2.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva y = x.senx en el punto x = π
VER VIDEO https://youtu.be/Rkc07449WsI

$$y = f(\pi) + f'(\pi).(x - \pi)\begin{cases} f(\pi) = \pi.\mathrm{sen}\,\pi = 0 \\ f'(x) = \mathrm{sen}\,x + x.\cos x \rightarrow f'(\pi) = \mathrm{sen}\,\pi + \pi.\cos\pi = -\pi \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow y = 0 - \pi\,(x - \pi) \rightarrow y = -\pi.x + \pi^2$

b. Me dan la función en forma implícita y la x del punto de tangencia.

3. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva lny + xy = 1 en el punto (1, 1)
VER VIDEO https://youtu.be/vtcN_h4FdKk

Aplicando la derivación implícita $\frac{1}{y}\cdot y' + 1\cdot y + x\cdot y' = 0 \overset{En\ (1,1)}{\rightarrow}\ y' = \frac{-1}{2}$

Ecuación recta tangente: y = f(1) + f'(1)·(x – 1); y = 1 + $\frac{-1}{2}$·(x – 1);

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2}$$

c. Me dan la función y un punto que puede pertenecer o no a la función.

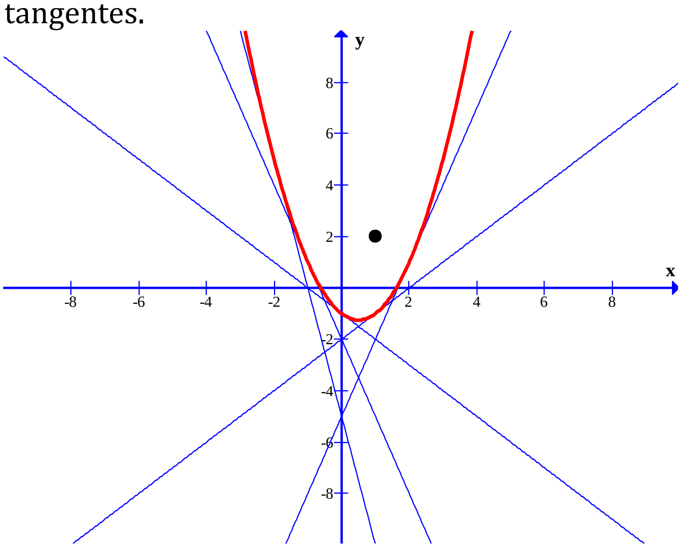
4. Dada la función $y = x^2 - x - 1$. Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha función en el punto (1, 2).

VER VIDEO https://youtu.be/BUC44Vo08qk

El punto (1, 2) no pertenece a la curva (basta sustituir).
La ecuación de una recta que pasa por (1, 2) es $y = 2 + m(x - 1)$. Despejando el valor de m, $m = \frac{y-2}{x-1}$

Hacemos f '(x) $=\ m \rightarrow\ 2x - 1 = \frac{y-2}{x-1} \rightarrow$ sustituimos y: $2x - 1 = \frac{x^2 - x - 3}{x-1}$.

Si operamos vemos que la ecuación no tiene solución real. Por tanto, por el punto (1, 2) no pasa ninguna tangente a la curva. Observa la gráfica en la que hay dibujadas varias tangentes.



d. Me dan la función y no me dan ni la x del punto de tangencia ni un punto, sino que me dicen de que punto se trata.

5. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva y = x.lnx en el punto de corte con el eje X.

VER VIDEO https://youtu.be/9H8SQAOW0fw

Corte con el eje X (y = 0): x.lnx = 0 $\begin{cases} x = 0, \text{no pertenece al dominio.} \\ \ln x = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$

En x = 1 ; y = f(1) + f'(1).(x – 1) $\begin{cases} f(1) = 1.\ln 1 = 0 \\ f'(x) = \ln x + 1 \rightarrow f'(1) = \ln 1 + 1 = 1 \end{cases} \rightarrow y = x - 1$

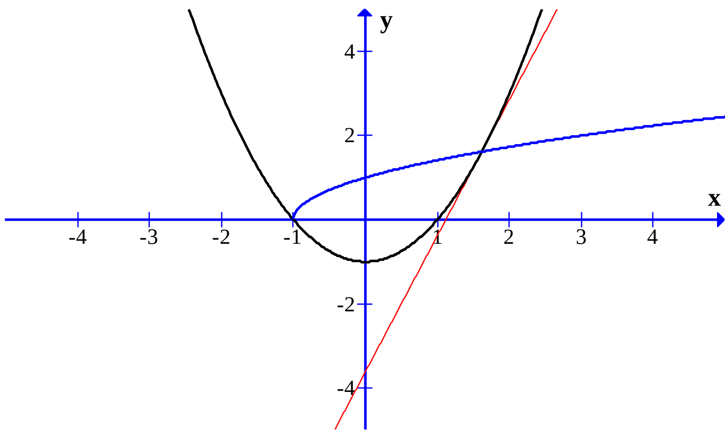
6. Se consideran las curvas $y = x^2 - 1$ i $y = \sqrt{x+1}$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la primera curva en el punto de corte con la segunda, de abcisa positiva.
VER VIDEO https://youtu.be/j_35iN2sv7U

Punto de corte $x^2 - 1 = \sqrt{x+1} \rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = x + 1 \rightarrow x^4 - 2x^2 - x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x.(x^3 - 2x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 2x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{cases} \rightarrow \text{Tomamos } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Ecuación recta tangente: } y = f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + f'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \rightarrow$$

$$y = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1 + (1+\sqrt{5}).\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$



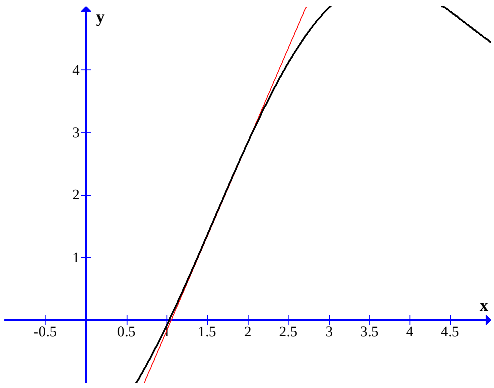
7. Demostrar que la curva f(x) = x – 2cos x tiene un punto de inflexión en el interior del intervalo [0 ,π] y hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en este punto. Haz un dibujo en un entorno de éste.
VER VIDEO https://youtu.be/octLRhKbrlI

$f(x) = x - 2.\cos x \rightarrow f'(x) = 1 + 2.\operatorname{sen} x \rightarrow f''(x) = 2.\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}.$

$f'''(x) = -2.\operatorname{sen} x \rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \rightarrow$ en $x = \frac{\pi}{2}$ la función tiene un punto de inflexión. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

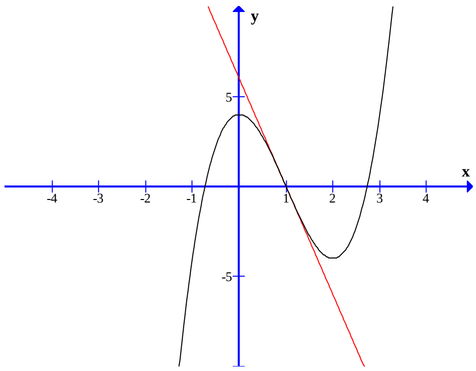
Ecuación de la recta tangente en $x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right).\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$

$\rightarrow y = 3x - \pi$



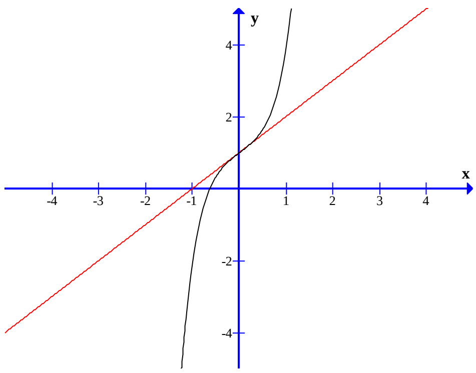
8. Se considera la función f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4 calcula la ecuación de la recta tangente a la curva representativa de esta función en su punto de inflexión. Haz también una gráfica aproximada de la función en un entorno de este.

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4 \rightarrow f'(x) = 6x^2 - 12x \rightarrow f''(x) = 12x - 12 = 0 \quad x = 1$
Tiene un punto de inflexión en x = 1.
La recta tangente es $y = f(1) + f'(1).(x - 1) \rightarrow \; y = -6x + 6$



9. Demostrar que la función f(x) = x^5 + x^3 + x + 1 tiene un único punto de inflexión. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva representativa de esta función en el punto P.

$f(x) = x^5 + x^3 + x + 1 \rightarrow f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 \rightarrow f''(x) = 20x^3 + 6x = 0 \rightarrow x = 0$
Punto de inflexión (0, 1).
Recta tangente es $y = f(0) + f'(0).(x - 0) \rightarrow \; y = x + 1$



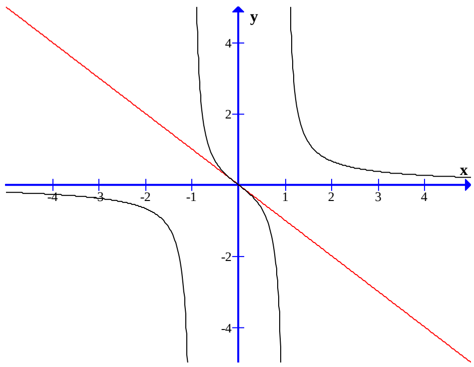
10. Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto de inflexión de la función f(x) = $\frac{\mathrm{Lnx}}{\mathrm{x}}$. Haz un gráfico de la función en un entorno de este punto, donde aparezca también dibujada la recta tangente.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} \rightarrow f''(x) = \frac{\frac{-1}{x}x^2 - 2x(1-\ln x)}{x^4} = \frac{-3+2\ln x}{x^3} = 0 \rightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$$

Recta tangente es $y = \underbrace{f(e^{\frac{3}{2}})}_{0'33} + \underbrace{f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right)}_{-0'025}.\left(x - \underbrace{e^{\frac{3}{2}}}_{4'48}\right) \rightarrow y = -0'025x + 0'446$

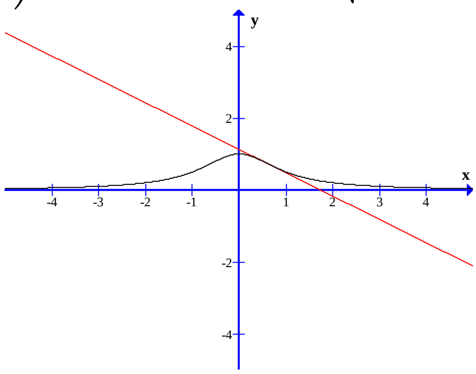
11. Halla el punto de inflexión de la curva de ecuación $y = \frac{x}{x^2-1}$ y calcula la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

Punto de inflexión (0, 0). Recta tangente y = - x.



12. Determina el punto de inflexión de abcisa positiva de la curva de ecuación $y = \frac{1}{1+x^2}$. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva en ese punto. ¿Cuál es la posición de la curva respecto a la tangente?

Punto de inflexión $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{3}{4}\right)$. Recta tangente y = $\frac{-9}{8}\sqrt{\frac{1}{3}}x + \frac{9}{8}$



13. Demostrar que la curva de ecuación y = $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ no tiene puntos de inflexión. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (x_0, y_0) donde x_0 es el valor de x que hace mínima y''.

y'= $4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$; y'' = $12x^2 - 6x + 2 = 0$ No tiene solución real. No tiene punto de inflexión.

Para que y'' sea minima, f''' debe ser cero f'''(x) = 24x – 6 = 0 → x = ¼.

El punto que hace mínima y''es $\left(\frac{1}{4}, \frac{205}{256}\right)$ y la recta tangente $y = \frac{-5}{8}x + \frac{245}{256}$

e. Me dan la función y no me hablan del punto de tangencia ni de ningún punto, pero sí me dan datos para conocer la pendiente de la recta tangente.

14. Hallar los puntos de la curva $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ en los cuáles la pendiente de la recta tangente es uno.

VER VIDEO https://youtu.be/-X8mvvk7YuI

La pendiente de la tangente es la derivada en el punto de tangencia, f '(x) = m, de donde, f '(1) = 1

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \rightarrow y = \pm\sqrt{2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)} = \pm\sqrt{\frac{4 - x^2}{2}}$$

$$y' = \pm\frac{-x}{2.\sqrt{\frac{4 - x^2}{2}}} = 1, \text{si } f'(1) = 0 \rightarrow \pm\frac{-x}{2.\sqrt{\frac{4 - x^2}{2}}} = 1 \rightarrow \mp x = 2.\sqrt{\frac{4 - x^2}{2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 = 4\frac{4 - x^2}{2} \rightarrow x^2 = 8 - 2x^2 \rightarrow\rightarrow 3x^2 = 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}} = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Los puntos son} \begin{cases} \left(2\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \\ \left(-2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \end{cases}$$

15. Considerar la función, determinar el valor de k para el cual la pendiente de la recta tangente a la función en x = 0 toma el valor 3.

$$\mathbf{f(x) = \frac{e^{kx}}{1 + x^2}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/lxXHYrn1qpU

$$m = f'(0) = 3 \rightarrow f'(x) = \frac{ke^{kx}(1+x^2) - 2xe^{kx}}{(1+x^2)^2} = \frac{e^{kx}(k - 2x + kx^2)}{(1+x^2)^2} \rightarrow$$

$\rightarrow f'(0) = k = 3.$

3. DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS O COEFICIENTES DE UNA FUNCIÓN.

Para los ejercicios de determinación de parámetros seguiremos el siguiente esquema:

VER VÍDEO https://youtu.be/r9dGY5JBe9c

Sea $f = ax^3 + bx^2 - cx + d \rightarrow f' = 3ax^2 + 2bx - c \rightarrow f'' = 6ax + 2b$

1• Si dice pasa por (3, 2) $\rightarrow f(3) = 2 \rightarrow 2 = 27a + 9b - 3c + d$

2• Si dice tiene un $\left\{\begin{matrix}\text{extremo}\\ \text{máximo}\\ \text{mínimo}\end{matrix}\right\}$ en $x = 3 \rightarrow f'(3) = 0 \rightarrow 0 = 27a + 6b - c$

3• Si dice tiene un $\left\{\begin{matrix}\text{extremo}\\ \text{máximo}\\ \text{mínimo}\end{matrix}\right\}$ en $(2, -1) \rightarrow$

$\begin{cases}\text{pasa por } (2,-1) \rightarrow f(2) = -1 \rightarrow -1 = 8a + 4b - 2c + d\\ \text{extremo para } x = 2 \rightarrow f'(2) = 0 \rightarrow 0 = 12a + 4b - c\end{cases}$

4• Si dice tiene un punto de inflexión en $x = -2 \rightarrow f''(-2) = 0 \rightarrow 0 = -12a + 2b$

5• Si dice tiene un punto de inflexión en $(1, 3) \rightarrow \begin{cases}\text{pasa por } (1,3) \rightarrow f(1) = 3 \rightarrow 3 = a + b - c + d\\ f''(1) = 0 \rightarrow 0 = 6a + 2b\end{cases}$

Si habla de la recta tangente $\rightarrow f'(x) = m$ (pendiente de la recta tangente)

6• Si dice tiene $\underbrace{\text{tangente horizontal}}_{m=0}$ en $x = 3 \rightarrow f'(3) = 0 \rightarrow 0 = 27a + 6b - c$

7• Si dice tiene tangente paralela a $\underbrace{y = 2x - 1}_{m=2}$ en $x = 4 \rightarrow f'(4) = 2 \rightarrow 2 = 48a + 8b - c$

8• Si dice la tangente en $x = -2$ $\underbrace{\text{forma un ángulo de 45º}}_{\text{tag } 45=1=m}$ con el eje X $\rightarrow f'(-2) = 1 \rightarrow$

$1 = 12a - 4b - c$

9• Si dice tiene $\underbrace{\text{tangente horizontal}}_{m=0}$ en $(1, 0) \rightarrow$

$\begin{cases}\text{Pasa por } (1,0) \rightarrow f(1) = 0 \rightarrow 0 = a + b - c + d\\ \underbrace{\text{tangente horizontal}}_{m=0} \text{ en } (1,0) \rightarrow f'(1) = 0 \rightarrow 0 = 6a + 2b\end{cases}$

1. Las funciones $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ y $g(x) = x - cx^2$ pasan por el punto (1, 0). Determinar los coeficientes a, b y c para que tengan la misma recta tangente en dicho punto. Hallarla.

VER VÍDEO https://youtu.be/PSXtCamcLuM

$f'(x) = 4x^3 + 2ax + b$; $g'(x) = 1 - 2cx$

$f(x)$ pasa por $(1, 0)$; $f(1) = 0$; $1 + a + b = 0$

$g(x)$ pasa por $(1, 0)$; $g(1) = 0$; $1 - c = 0 \rightarrow c = 1$

tienen la misma tangente; $f'(1) = g'(1)$; $4 + 2a + b = 1 - 2c$

$$\begin{cases}a + b = -1\\ 2a + b = -5\end{cases} \rightarrow \begin{cases}a = -4\\ b = 3\\ c = 1\end{cases}$$

La recta tangente es $y = f(1) + f'(1)\cdot(x - 1)$; $y = 0 - (x - 1)$

2. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tiene un extremo relativo en $x = 2$ y un punto de inflexión en $x = 3$. Calcular los valores de a y b, y determinar si este extremo es máximo o mínimo relativo.

VER VÍDEO https://youtu.be/gw-C-kp5_mY

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f''(x) = 6x + 2a$

Un extremo en $x = 2 \rightarrow f'(2) = 0 \rightarrow 12 + 4a + b = 0 \rightarrow b = 24$

Un punto de inflexión en $x = 3 \rightarrow f''(3) = 0 \rightarrow 18 + 2a = 0 \rightarrow a = -9$

$f''(2) < 0 \rightarrow$ máximo.

3. Determinar los valores de a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el punto (1, 0), tenga un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 0$.

VER VÍDEO https://youtu.be/SkclLsirwyI

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$; $f''(x) = 6x + 2a$

$$\begin{cases} \text{Pasa por } (1,0) \rightarrow f(1) = 0 \rightarrow 1 + a + b + c = 0 \\ \text{Máx. rel en } x = -1 \rightarrow f'(-1) = 0 \rightarrow 3 - 2a + b = 0 \\ \text{Mín. rel. en } x = 0 \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 0 \\ c = \frac{-5}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2};\ f'(x) = 3x^2 + 3x;\ f''(x) = 6x + 3 \rightarrow \begin{cases} \overbrace{f''(-1) < 0}^{\text{confirma un máximo}} \\ \underbrace{f''(0) = 0 > 0}_{\text{confirma un mínimo.}} \end{cases}$$

4. La función $f(x) = x^3 + px^2 + q$ tiene un valor mínimo relativo igual a 7 en el. $x = 3$. Determina los valores de p y q.

VER VÍDEO https://youtu.be/aC4HN0etWIE

$f(x) = x^3 + px^2 + q \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2px$

$$f(x)\text{tiene un mínimo relativo en } (3,7) \underbrace{\rightarrow}_{\substack{\text{esquema} \\ \text{punto 3}}} \begin{cases} f(3) = 7 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 27 + 9p + q = 7 \\ 27 + 6p = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} p = \frac{-9}{2} \\ q = \frac{41}{2} \end{cases} \rightarrow f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{41}{2}$$

Para verificar la existencia de un máximo resolvemos $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 9x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f''(x) = -9 < 0 \rightarrow \text{Máximo relativo en } \left(0, \frac{41}{2}\right) \\ x = 3 \end{cases}$$

5. Calcula a y b para que la función $f(x) = a.\ln x + bx^2 + x$ tenga extremos relativos en $x = 1$ y

x = 3.

VER VÍDEO https://youtu.be/4rcGnYirdGw

$$f(x) = a.\ln x + bx^2 + x \to f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Extremo relativo en } x = 1 \to f'(1) = 0 \to a + 2b + 1 = 0 \\ \text{Extremo relativo en } x = 2 \to f'(2) = 0 \to \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} a = \frac{-2}{3} \\ b = \frac{-1}{6}\end{array}\right.$$

$$f(x) = \frac{-2}{3}.\ln x + \frac{-1}{6}x^2 + x \to f'(x) = \frac{-2}{3x} + \frac{-1}{3}x + 1 \to f''(x) = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$$

$f''(1) = \frac{1}{3} > 0 \to$ en $x = 1$ hay un mínimo.

$f''(2) = \frac{-1}{6} < 0 \to$ en $x = 2$ hay un máximo.

6. Se considera la función f(x). Dar el valor de a para que tenga un mínimo relativo en x = 1

$$\mathbf{f(x) = x.\ln\frac{x}{a}, a > 0}$$

$$f(x) = x.\ln\frac{x}{a} \to f'(x) = \ln\frac{x}{a} + 1 \to f''(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{Mín. relativo en } x = 1 \to f'(1) = 0 \to 0 = \ln\frac{1}{a} + 1 \to \ln\frac{1}{a} = -1 \to e^{-1} = \frac{1}{a} \to a = e$$

Como f ''(1) = 1 > 0 confirma un mínimo en x = 1.

7. Se considera la función: $\mathbf{f(x) = a.e^{x^2+bx+c}}$. Calcula los parámetros a, b y c sabiendo que la función tiene un mínimo relativo en el punto (1, a) y f(0) = 1.

VER VÍDEO https://youtu.be/_Dar4Zve7r0

Mínimo en $(1, a)$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{pasa por } (1,a) \to f(1) = a \to a = a.e^{1+b+c} \to e^{1+b+c} = 1 \to 1 + b + c = 0 \\ \text{mínimo en } (1,a) \to \left\{\begin{array}{l} f'(1) = 0 \\ f'(x) = a.(2x+b)e^{x^2+bx+c}\end{array}\right. \to 0 = a.(2+b)e^{1+b+c} \to b = -2\end{array}\right.$$

Como 1 + b + c = 0, si b = – 2 → c = 1

f(0) = 1 → 1 = a.e^c; si c = 1 → a = 1/e

8. Dada la función f(x), calcula a y b de forma que la gráfica de f(x) pasa por (3, 10) y tenga tangente horizontal en este punto.

$$\mathbf{f(x) = 2ax + b + \frac{36}{x}}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/hD-9Xc5EOpk

$$f(x) = 2ax + b + \frac{36}{x} \to f'(x) = 2a - \frac{36}{x^2}$$

Si pasa por (3, 10) → f(3)=10 → 6a + b + 12 = 10

Si tiene tangente horizontal en $(3{,}10) \to f'(x) = m \to f'(3) = 0 \to 2a - \frac{36}{9} = 0$

De donde a = 2 y b = – 14.

9. Dada la función $f(x) = x \cdot e^{ax+b}$, Determina los valores de a y b sabiendo que la función presenta una extremó en el punto (1, e) estudia si dicho extremo es un máximo o un mínimo y si tiene más extremos.

VER VÍDEO https://youtu.be/nTItHIYHCv0

9. Considerarla función $f(x) = ax^3 + x^2 + bx + 7$. Determinar los valores de los parámetros a y b para que la función tenga un extremó relativo en x = - 1 y otro en x = 3.

$f(x) = ax^3 + x^2 + bx + 7 \to f'(x) = 3ax^2 + 2x + b$

$$\begin{cases} \text{Tiene un extremo en } x = -1 \to f'(-1) = 0 \to 3a - 2 + b = 0 \\ \text{Tiene un extremo en } x = 3 \to f'(3) = 0 \to 27a + 6 + b = 0 \end{cases} \begin{cases} a = \frac{-1}{3} \\ b = 3 \end{cases}$$

10. Dada la función f(x), hallar a y b de forma que la gráfica pase por el punto (3, 4) y tenga tangente horizontal en dicho punto.

$$\mathbf{f(x) = ax + b + \frac{3}{x}}$$

$f(x) = ax + b + \frac{3}{x} \to f'(x) = a - \frac{3}{x^2}$

Pasa por $(3{,}4) \to f(3) = 4 \to 4 = 3a + b + 1 \to 3a + b - 3 = 0$

Tangente horizontal en $(3{,}4) \to f'(3) = m \to f'(3) = 0 \to 0 = a - \frac{3}{9} \to a = \frac{1}{3}$

Si $a = \frac{1}{3} \to b = 2.$

11. Sea $f : R \longrightarrow R$ la función definida por: $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$. Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta y = 2 x + 3. a = 26 y b = 19

$f' = 6x^2 + 24x + a$; $f'' = 12x + 24 = 0$; $x = -2$

$y = 2\cdot(-2) + 3 = -1$; la tangente y la función se cortan en $(-2, -1)$

La función pasa por $(-2, -1)$; $f(-2) = -1$; $-1 = -16 + 48 - 2ax + b$

Recta tangente en $(-2, -1)$ es $y = 2x + 3 \to f'(-2) = m \to f'(-2) = 2$; $24 - 48 + a = 2$

a = 26, b = 19

12. Dada $g(x) = ax^4 + bx + c$, calcula los valores de a, b y c para que g(x) tenga en el punto (1, −1) un mínimo relativo y la recta tangente a la gráfica de g(x), en x = 0, sea paralela a la recta y = 4x.

$g'(x) = 4ax^3 + b$

Punto $(1, -1)$ es un mínimo relativo: $\begin{cases} \text{Pasa por } (1, -1);\ g(1) = -1;\ a + b + c = -1 \\ \text{Mínimo: } g'(1) = 0;\ 4a + b = 0 \end{cases}$

La recta tangente a g(x), en x = 0, es paralela a y = 4x; $g'(0) = m$; $g'(0) = 4$; $b = 4$

$a = -1$, $b = 4$ y $c = -4$; $g(x) = -x^4 + 4x - 4$

13. Determina dónde se alcanza el mínimo de la función $f(x) = 3x^2 - 6x + a$. Calcula el valor de a para que el valor mínimo de la función sea 5. a = 8.

$f'(x) = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$; $f''(x) = 6 > 0 \rightarrow$ en x = 1 hay un mínimo. El mínimo es el punto (1, 5) $\rightarrow f(1) = 5 \rightarrow 3 - 6 + a = 5 \rightarrow a = 8$.

14. Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = a\,\text{sen}\,x + bx^2 + cx + d$, determina los valores de las constantes a, b, c y d sabiendo que la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto (0,4) y que la segunda derivada de f es $f''(x) = 3.\text{sen}x - 10$.

$f(x) = a\,\text{sen}\,x + bx^2 + cx + d \rightarrow f'(x) = a.\cos x + 2bx + c \rightarrow \begin{cases} f''(x) = -\ a.\text{sen}x\ +\ 2b \\ f''(x)\ =\ 3.\text{sen}x -\ 10 \end{cases} \rightarrow\rightarrow$

$a = -3$ y $b = -5$

Tiene tangente horizontal en (0, 4)

$$\begin{cases} \text{pasa por } (0{,}4) \rightarrow f(0) = 4 \rightarrow 4 = d \\ \underbrace{\text{tangente horizontal}}_{m=0} \rightarrow f'(0) = m = 0 \rightarrow a + c = 0 \rightarrow c = 3 \end{cases}$$

15. Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determina a, b y c sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en (1,0), y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación $y = -3x + 3$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \rightarrow f'(x) = 3.a.x^2 + 2.b.x + c \rightarrow f''(x) = 6.a.x + 2.b$

Tiene un punto de inflexión en (1, 0):

$$\begin{cases} \text{pasa por } (1{,}0) \rightarrow f(1) = 0 \rightarrow 0 = a + b + c \\ \text{punto de inflexión} \rightarrow f''(1) = 0 \rightarrow 0 = 6a + 2b \end{cases}$$

La recta tangente en ese punto tiene por ecuación $\underbrace{y\ = -\ 3x\ +\ 3}_{m=-3}$:

$f'(1) = m = -3 \rightarrow -3 = 3a + 2b + c$

Resolviendo el sistema. $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 6a + 2b = 0 \\ 3a + 2b + c = -3 \end{cases} \begin{cases} a = 3 \\ b = -9 \\ c = 6 \end{cases}$

4. REGLA DE L'HOPITAL

$$\left.\begin{cases} \text{Si f y g son funciones derivables en un entorno del punto a,} \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}, \\ \text{y } \exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \end{cases}\right\} \rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Indeterminación del tipo: $\dfrac{0}{0} \rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

1. Efectúa el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2}$$

VER VIDEO https://youtu.be/7dK3OHHUi1c

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{6x+2}{2x-1}=\frac{14}{3}$$

2. Efectúa el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3-x)e^x-2x-3}{x^2}$$

VER VIDEO https://youtu.be/PaxQMKaMJkk

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3-x)e^x-2x-3}{x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-1\cdot e^x+(3-x)e^x-2}{2x}=\frac{0}{0}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x-e^x+(3-x)e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

3. Efectúa el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x^2}$$

VER VIDEO https://youtu.be/9zextmHaCvA

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-x+\frac{x^3}{6}}{x^3}=\frac{0}{0}(\text{ind.})=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{3}}{3x^2}=\frac{0}{0}(\text{ind.})=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}x+\frac{2x}{3}}{6x}=$$
$$=\frac{0}{0}(\text{ind.})=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+\frac{2}{3}}{6}=\frac{-1+\frac{2}{3}}{6}=\frac{-1}{18}$$

4. Efectúa el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-x+\frac{x^3}{6}}{x^3}$$

VER VIDEO https://youtu.be/q4Tflt5ahJs

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-x+\frac{x^3}{6}}{x^3}=\frac{0}{0}(\text{ind.})=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{3x^2}=\frac{0}{0}(\text{ind.})=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}x+x}{6x}=\frac{0}{0}(\text{ind.})=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+1}{6}=\frac{0}{6}=0$$

5. Efectúa el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2-x).e^x-x-2}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2-x)e^x-x-2}{x^3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-1\cdot e^x+(2-x)e^x-1}{3x^2}=\frac{0}{0}(ind.)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x-e^x+(2-x)e^x}{6x}=\frac{0}{0}(\text{ind.})=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x-e^x-e^x+(2-x)e^x}{6}=\frac{-1}{6}$$

6. Efectúa el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{\triangleq}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1}=1$$

7. Efectúa el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{\triangleq}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$$

8. Efectúa el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\operatorname{sen}x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\operatorname{sen}x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{\triangleq}\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\operatorname{sen}x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{\triangleq}\lim_{x\to 0}\frac{6}{\cos x}=\frac{6}{1}=6$$

9. Efectúa el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{\triangleq}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{\triangleq}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

10. Efectúa el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x.\operatorname{sen}x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x.\operatorname{sen}x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x+x.\cos x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{\triangleq}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x+\cos x-x.\operatorname{sen}x}=0$$

Indeterminación del tipo: $\frac{\infty}{\infty}\to\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

11. Efectúa el siguiente límite.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}=\frac{\infty}{\infty}(\text{ind.})=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}=0\ (\text{por orden de infinitud})$$

12. Efectúa el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{\operatorname{sen}x}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/Xm3fj8TMlGw

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{\operatorname{sen}x}}=\frac{-\infty}{\infty}(\text{ind.})=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{(\operatorname{sen}x)^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen}x)^2}{-x^2\cos x}=\frac{0}{0}(\text{ind.})=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x}{-2x\cdot\cos x+x^2\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x}{x(-2\cdot\cos x+x\cdot\operatorname{sen}x)}=\frac{0}{0}(\text{ind.})=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\cos 2x}{(-2\cdot\cos x+x\cdot\operatorname{sen}x)+x\cdot(2\cdot\cos x+\operatorname{sen}x+x\cdot\cos x)}=\frac{2}{-2}=-1$$

13. Efectúa el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln x}{e^{\frac{1}{x}}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/leBJC8LCNhQ

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln x}{e^{\frac{1}{x}}}=\frac{\infty}{\infty}(ind.)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{-e^{\frac{1}{x}}}=\frac{0}{-\infty}=0$$

14. Efectúa el siguiente límite.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+1}{5^x+1}=0$$

VER VIDEO https://youtu.be/jf-iZwt5W-A

15. Efectúa el siguiente límite.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+x}{x^2}=\infty$$

14. Efectúa el siguiente límite.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{lnx}}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'H}{\cong}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

14. Efectúa el siguiente límite.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\mathbf{lnx}}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{\infty}\overset{L'H}{\cong}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}-x=0$$

$$18.\ \lim_{x\to\pi/2}\frac{\mathbf{tgx-8}}{\mathbf{secx+10}}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'H}{\cong}\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{\frac{senx}{\cos^2x}}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{senx}=\frac{1}{1}=1$$

$$19.\ \lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{x.lnx}}{\mathbf{x^2+1}}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'H}{\cong}\lim_{x\to\infty}\frac{lnx+x\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{lnx+1}{2x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'H}{\cong}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2}=\frac{0}{2}=0$$

$$20.\ \lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{x.e^x}}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'H}{\cong}\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x+xe^x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'H}{\cong}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x+e^x+x.e^x}=0$$

Indeterminación del tipo: $0.\infty$

$$\to\lim_{x\to a}f(x).g(x)=0.\infty=\begin{cases}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{0}{0}\to L'H\\ \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\frac{\infty}{\infty}\to L'H\end{cases}$$

$$\mathbf{21.}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathbf{tagx-1}).\mathbf{sec2x=-1}$$

VER VIDEO https://youtu.be/YNqnxhy85H0

$$\mathbf{22.}\lim_{x\to+\infty}\mathbf{x.}\left(\mathbf{5^{\frac{1}{x}}-1}\right)=\mathbf{ln5}$$

VER VIDEO https://youtu.be/HbfIDQZGhL8

$$\mathbf{23.}\lim_{x\to0}\mathbf{arcsenx.cotagx}=1$$

$$\mathbf{24.}\lim_{x\to\infty}\mathbf{x.sen\frac{1}{x}}=\infty.0=\lim_{x\to\infty}\frac{sen\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{\cong}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{x^2}.\cos\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}=1$$

$$\mathbf{25.}\lim_{x\to0}\mathbf{x.lnx}=0.(-\infty)=\lim_{x\to0}\frac{lnx}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{\infty}\overset{L'H}{\cong}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to0}-x=0$$

$$\mathbf{26.} \lim_{x\to\pi} \mathbf{senx.\ln(x-\pi)} = 0.(-\infty) = \lim_{x\to\pi} \frac{\ln(x-\pi)}{\frac{1}{\text{senx}}} = \frac{-\infty}{\infty} \overset{L'H}{\triangleq} \lim_{x\to\pi} \frac{\frac{1}{x-\pi}}{\frac{-\cos x}{\text{sen}^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{\text{sen}^2 x}{-(x-\pi).\cos x} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{\triangleq} \lim_{x\to\pi} -\frac{2.\text{senx}.\cos x}{\cos x - (x-\pi).\text{senx}} = -\frac{0}{-1} = 0$$

$$\mathbf{27.} \lim_{x\to 0} \mathbf{(e^x-1)\ln x} = 0.(-\infty) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{e^x-1}} = \frac{-\infty}{\infty} \overset{L'H}{\triangleq} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2}{-x\cdot e^x} = \frac{0}{0}\ (\text{ind.}) \overset{L'H}{\triangleq} \lim_{x\to 0} -\frac{2\cdot(e^x-1)e^x}{e^x + x\cdot e^x} = \lim_{x\to 0} -\frac{2\cdot(e^x-1)}{1+x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\mathbf{28.} \lim_{x\to 0} \mathbf{x.\ln x} = 0.(-\infty) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty} \overset{L'H}{\triangleq} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

Indeterminación del tipo: $\infty - \infty$

VER VIDEO https://youtu.be/we-GtgdZHyk

ORDEN DE INFINITUD

$$\mathbf{29.} \lim_{x\to\infty} \mathbf{x - \ln x} = \infty - \infty = \infty, (\text{x es de mayor orden que lnx})$$

SI SE PUEDE RESTAR SE RESTA.

$$\mathbf{30.} \lim_{x\to 0} \mathbf{\frac{1}{x} - \frac{1}{senx}} = \infty - \infty = \lim_{x\to 0} \frac{\text{senx} - x}{x.\text{senx}} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{\triangleq} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\text{senx} + x.\cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{L'H}{\triangleq} \lim_{x\to 0} \frac{\text{senx}}{\cos x + \cos x - x,\text{senx}} = \frac{0}{2} = 0$$

PRESENCIA DE RAICES.

$$\mathbf{31.} \lim_{X\to\infty} \mathbf{\sqrt{x} - \sqrt{x+2}} = \infty - \infty \overset{\substack{\text{multiplicamos y dividimos} \\ \text{por la expresión conjugada}}}{\triangleq}$$

$$\lim_{X\to\infty} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}} = \frac{-2}{\infty} = 0$$

OTROS.

$$\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x).g(x)}}$$

Para resolver.

$$\mathbf{32.} \lim_{x\to 0} \mathbf{\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{33.}\ \lim_{x\to 0}\left(\mathbf{cotgx}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\right)=0$$

$$\mathbf{34.}\ \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{x-1}}-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{\ln x}}\right]=+\infty$$

$$\mathbf{35.}\ \lim_{x\to +\infty}\sqrt{\mathbf{x}+\sqrt{\mathbf{x}}}-\sqrt{\mathbf{x}-\sqrt{\mathbf{x}}}=1$$

Indeterminación del tipo: $0^0, \infty^0$ Y 1^∞

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\begin{Bmatrix}0^0\\ \infty^0\\ 1^\infty\end{Bmatrix}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x).\ln f(x)}\ \overset{\substack{\text{solo para}\\ 1^\infty}}{\widehat{=}}\ e^{\lim\limits_{x\to a} g(x).(f(x)-1)}$$

$\mathbf{36}\ \lim\limits_{x\to\infty}(\mathbf{1-e^{-x}})^{\mathbf{e^x}}=\frac{1}{e}$ VER VIDEO https://youtu.be/-R9TaUbJOrQ

$\mathbf{37.}\ \lim\limits_{x\to 0}\mathbf{x^{tg\,x}}=1$ VER VIDEO https://youtu.be/Wf4kYAX7__g

$\mathbf{38.}\ \lim\limits_{x\to 0}(\mathbf{cotg\,x})^{\mathbf{sen\,x}}=1$ VER VIDEO https://youtu.be/OBh4wdPcrOk

$$\mathbf{39.}\ \lim_{x\to 0}\mathbf{x^{senx}}=0^0=e^{\lim\limits_{x\to 0}\text{senx}.\ln x}=e^{0.(-\infty)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\text{senx}}}}=e^{\frac{-\infty}{\infty}}\overset{L'H}{\widehat{=}}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\text{sen}^2x}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{\text{sen}^2x}{x.\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{0}{0}}\overset{L'H}{\widehat{=}}e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{2.\text{senx}.\cos x}{\cos x-x.\text{senx}}}=e^0=1$$

$$\mathbf{40.}\ \lim_{x\to\pi}(\mathbf{cosx})^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{senx}}}=1^\infty=e^{\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1}{\text{senx}}(\cos x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos x-1}{\text{senx}}}=e^{\frac{0}{0}}\overset{L'H}{\widehat{=}}e^{\lim\limits_{x\to\pi}\frac{-\text{senx}}{\cos x}}$$

$$=e^0=1$$

$$\mathbf{41.}\ \lim_{x\to\infty}\mathbf{x}^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}}=\infty^0=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}.\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}\overset{L'H}{\widehat{=}}e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=e^0=1$$

5. TEOREMA DE ROLLE.

Si una función f(x) es continua en [a, b], derivable en (a, b) y f(a) = f(b) entonces existe algún c perteneciente a (a, b) tal que f'(c) = 0

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{f(x)continua\ en\ [a,b]}\\ \mathbf{f(x)derivable\ en\ (a,b)}\\ \mathbf{f(a)=f(b)}\end{Bmatrix}\to\exists\mathbf{c}\in(\mathbf{a,b})/\mathbf{f'(c)=0}$$

1. Encontrar los valores a, b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 5 & \text{si } x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Verifique las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4]. Determinar en qué punto(s) se verifica la tesis que asegura el teorema.

VER VÍDEO https://youtu.be/-9iUJYHu4Nc

Primera hipótesis: continua en $x = 2$

$$\left. \begin{cases} f(2) = 2c + 1 \\ \lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 2^-} ax^2 + bx + 5 = 4a + 2b + 5 \\ \lim_{x \to 2} cx + 1 = 2c + 1 \end{cases} \end{cases} \right\} 2c + 1 = 4a + 2b + 5$$

Segunda hipótesis: derivable en $x = 2$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x < 2 \\ c & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \rightarrow \left. \begin{cases} f'(2^-) = 4a + b \\ f'(2^+) = c \end{cases} \right\} 4a + b = c$$

Tercere hipótesis: $f(0) = f(4) \rightarrow 5 = 4c + 1 \rightarrow c = 1$

$a = 1$, $b = -3$, $c = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \rightarrow 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

2. a. Demostrar que x = 0 es la única solución de la ecuación $5x^9 + 3x^5 + 7x = 0$.

b. Demostrar que x = 0 es la única solución de la ecuación $e^x = 1 + x$

VER VIDEO https://youtu.be/-WyRIywAviY

a.

$$5x^9 + 3x^5 + 7x = 0 \rightarrow x \cdot (5x^8 + 3x^4 + 7x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 5x^8 + 3x^4 + 7 = 0 \end{cases}$$

$5x^8 + 3x^4 + 7 = 0 \rightarrow 5t^2 + 3t + 7 = 0$; $\nexists$ solución real.

b.

$e^x = 1 + x \rightarrow e^x - 1 - x = 0 \rightarrow f(x) = e^x - 1 - x$

Supongamos que f tiene dos soluciones, $x = 0$ y $x = k$.

$$\left. \begin{array}{r} f(x) \text{es continua en } [0, k] \\ f(x) \text{es derivable en } (0, k) \\ f(0) = 0 = f(k) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} \text{Según el teorema de Rolle.} \\ \exists \alpha \in (0, k) / f'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$f'(x) = e^x - 1 = 0 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = 0$

Vemos que $x = 0$ es la única solución de $f'(x)$, por tanto, la existencia de alfa es falsa. Por tanto, la existencia de más de una solución es falsa. $X = 0$ es, pues, la única solución de la ecuación.

3. Demostrar que existe un único valor de x > 0 solución de la ecuación $x^2 - e^{-x} = 0$.

VER VIDEO https://youtu.be/aPo0-yrhNQ4

Sea $f(x) = x^2 - e^{-x}$

x	f(x)
– 1	negativo
0	negativo
1	positivo

1. $\left.\begin{array}{r}\mathrm{f(x) es\ continua\ en\ [0,1]}\\ \mathrm{signo\ f(0) \neq signo f(1)}\end{array}\right\}$ Según el T. de Bolzano $\exists c \in (0,1)/f(c) = 0$

Es decir, c es solución positiva de la ecuación $x^2 - e^{-x} = 0$.

2*. Supongamos que f(x) tiene dos soluciones positivas, c y d.

$$\left.\begin{array}{r}\mathrm{f(x) es\ continua\ en\ [c,d]}\\ \mathrm{f(x) es\ derivable\ en\ (c,d)}\\ \mathrm{f(c) = 0 = f(d)}\end{array}\right\} \text{Según el T. de Rolle } \exists\alpha \in (0,1)/\overbrace{f'(\alpha) = 0}^{**}$$

$$f(x) = x^2 - e^{-x} \rightarrow f'(x) = \overbrace{2x + e^{-x}}^{\text{Si x>0 esta expresión es siempre positiva. nunca cero}} = 0$$, la conclusión ** no es válida, por tanto, la suposición * no es válida.

Del punto 1 se deduce que la ecuación tiene solución. Del punto 2 se deduce que la ecuación no puede tener 2 soluciones. De los puntos 1 y 2 deducimos que si tiene solución y no puede tener 2, entonces tiene solución única.

---

4. a. Calcula el valor de a para que la función $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + ax & \text{si } x > 0 \end{cases}$ verifique el teorema de Rolle en el intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, 1\right]$.

b. Considerando el valor de a determinado en el apartado anterior Halla el valor de $c \in \left(\frac{-\pi}{2}, 1\right)$ tal qué f '(c) = 0.

---

5. Consideramos la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\frac{1}{2} + \cos x}$$

a. Comprobar que verifica que f(0) = f(π) = 0

b. Comprueba que la ecuación f '(x) = 0 no tiene solución en el intervalo (0, π).

c. Explica porque no se puede aplicar el teorema de Rolle en este caso.

---

a)

$$f(0) = \frac{\operatorname{sen}0}{\frac{1}{2} + \cos 0} = \frac{0}{\frac{1}{2} + 1} = 0 = f(\pi) = \frac{\operatorname{sen}\pi}{\frac{1}{2} + \cos\pi} = \frac{0}{\frac{1}{2} - 1} = 0$$

b)

$$f'(x) = \frac{\cos x\left(\frac{1}{2} + \cos x\right) + \operatorname{sen}^2 x}{\left(\frac{1}{2} + \cos x\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}\cos x + \overbrace{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}^{1}}{\left(\frac{1}{2} + \cos x\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}\cos x + 1}{\left(\frac{1}{2} + \cos x\right)^2} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = -2 \rightarrow \nexists \text{solución}.$$

c) Si calculamos el dominio de la función, $\frac{1}{2} + \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$;

resulta que en $x = \frac{3\pi}{4}$ la función no es continua. Por tanto no cumple la 1ª hipótesis del teorema de Rolle.

6. Sea la función f(x) = sen2x – x. Demostrar que la función tiene exactamente tres ceros en el intervalo (- π/2, π/2).

X	y
$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{-\pi}{4}$	– 0.21
0	0
$\frac{\pi}{4}$	0,21
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{2}$

1.

$$\begin{cases} \text{f(x) es continua en } \left[\frac{-\pi}{2},\frac{-\pi}{4}\right] \\ \text{Signo f}\left(\frac{-\pi}{2}\right) \neq \text{signo f}\left(\frac{-\pi}{4}\right) \end{cases} \rightarrow \nexists\, c \in \left(\frac{-\pi}{2},\frac{-\pi}{4}\right) /\text{f©} = 0$$

$$\begin{cases} \text{f(x) es continua en } \left[\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right] \\ \text{Signo f}\left(\frac{-\pi}{4}\right) \neq \text{signo f}\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \rightarrow \nexists\, d \in \left(\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) /\text{f(d)} = 0$$

$$\begin{cases} \text{f(x)es continua en } \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right] \\ \text{Signo f}\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq \text{signo f}\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \rightarrow \nexists\, e \in \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right) /\text{f©} = 0$$

La función tiene al menos tres ceros c, d y e en el intervalo $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

2.

Supongamos que f(x)tiene 4 ceros c, d, e y g en $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{cases} \text{f(x)es continua en } [c,d] \\ \text{f(x)es derivable en } (c,d) \rightarrow \nexists\, \alpha \in (c,d)/f'(\alpha) = 0 \\ f(c) = f(d) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{f(x)es continua en } [d,e] \\ \text{f(x)es derivable en } (d,e) \rightarrow \nexists\, \alpha \in (d,e)/f'(\beta) = 0 \\ f(d) = f(e) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{f(x)es continua en } [e,g] \\ \text{f(x)es derivable en } (e,g) \rightarrow \nexists\, \alpha \in (e,g)/f'(\gamma) = 0 \\ f(e) = f(g) = 0 \end{cases}$$

* f ’(x) tiene tres soluciones α, β y γ.

$$f'(x) = 2\cdot\cos 2x - 1 = 0 \rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 2x = \frac{5\pi}{3} \rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \notin \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 2x = -\frac{1}{3}\pi \rightarrow x = -\frac{1}{6}\pi \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

**f'(x)solo tiene 2 soluciones en $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Hay una contradicción * y **.

$\begin{cases} \text{De 1, f(x) tiene tres soluciones.} \\ \text{De 2, f(x) no tiene cuatro soluciones.} \end{cases} \rightarrow$ f(x)tiene exactamente 3 soluciones.

7. Sea a un valor real que está estrictamente entre – 1 y 1. Definimos la función siguiente

$$\mathbf{f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + x - 3}$$

Demostrar que la función anterior solo se anula para un valor de x.

Demostremos que f(x) tiene solución:

$\left.\begin{array}{l} \text{f(x)es continua en [0,3]por ser función polinómica.} \\ f(0) < 0 \\ f(3) > 0 \end{array}\right\}$ según el Teorema de Bolzano

$\exists c \in (0,3)/f© = 0 \rightarrow \frac{1}{3}c^3 + a.c^2 + c - 3 = 0 \rightarrow$ c es solución de f(x).

Veamos que la solución es única.

*Supongamos que f(x) tiene dos soluciones, c y d.

$\left.\begin{array}{l} \text{f(x)es continua en [c, d]por ser función polinómica.} \\ \text{f(x) es derivable en (c, d) por ser función polinómica} \\ f© = f(d) = 0 \end{array}\right\}$ ** según el Teorema de Rolle

$\exists \alpha \in (c,d)/f'© = 0$

Calculamos f'(x), igualamos a cero y resolvemos: f'(x) = $x^2 + 2.a.x + 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{-2ª \pm \sqrt{4ª^2 - 4}}{2} \overset{\text{si } -1<a<1}{\Rightarrow} 4ª^2 - 4 < 0$ y la ecuación no tiene solución.

Si f'(x) no tiene solución no es cierto la conclusión **y por tanto la suposición * es falsa. Por tanto la función no puede tener dos soluciones. Solo tiene una.

8. Sea a un valor estrictamente positivo. Consideramos la función polinómica dependiente de a f(x) = x^3 + ax + 1.

a. Demostrar que la ecuación f(x) = 0 solo puede tener cómo máximo una solución.

b. Demostrar que la solución del apartado anterior existe y está entre – 1 y 0.

a) Supongamos que la ecuación f(x) = $x^3 + a\cdot x + 1 = 0$ tiene dos soluciones: c y d.(**)

$\left.\begin{array}{l} \text{f(x)es continua en [c, d]} \\ \text{f(x)es derivable en (c, d)} \\ f(c) = 0 = f(d) \end{array}\right\}$ según el T. de Rolle $\exists \alpha \in (c,d)/f'(\alpha) = 0$(*)

$f'(x) = 3x^2 + a = 0 \to x = \pm\sqrt{\frac{-a}{3}}$; Si $a > 0$ no existe x solución de $f'(x)$. Esta conclusión contradice la conclusión (*), por tanto la suposición (**) es falsa. **La ecuación no puede tener dos soluciones.**

b)

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \text{es continua en } [-1,0] \\ \text{signo } f(-1) = -a \neq \text{signo } f(0) = 1 \end{array}\right\} \text{Según el T. de Bolzano } \exists c \in (-1,0)/f© = 0, \text{ es}$$

decir, c es solución de la ecuación $x^3 + a{\cdot}x + 1 = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) La ecuación no puede tener dos soluciones} \\ \text{b) La ecuación iene una solución entre } -1 \text{ y } 0 \end{array}\right\} \textbf{La ecuación tiene una única solución.}$$

9. Demostrar que la función $f(x) = x^3 - 3x + \sqrt{2}$ no puede tener dos raíces reales en el intervalo [0, 1]. ¿Cuántas raíces tiene en el intervalo [0, 1]?

Que no puede tener dos raíces lo demostramos por reducción al absurdo.

Supongamos que $f(x) = x^3 - 3x + \sqrt{2}$ tiene dos raíces en [0, 1]: a y b.

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \text{es continua en } [a,b], \text{por ser función polinómica.} \\ f(x) \text{es derivableen } (a,b), \text{por ser función polinómica.} \\ f(a) = 0 = f(b), \text{pues a y b son soluciones de } f(x). \end{array}\right. \to \text{Aplicando el}$$

Teorema de Rolle podemos afirmar que $\exists \alpha \in (a,b)/f'(\alpha) = 0$, es decir, $f'(x)$ tiene una solución en el intervalo (0, 1).

Derivamos f(x), $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \to x = \pm 1$

Si los únicos valores que anulan a $f'(x)$ son ± 1, la conclusión: $f'(x)$ tiene una solución en el intervalo (0, 1) es falsa. Luego la suposición: Supongamos que $f(x) = x^3 - 3x + \sqrt{2}$ tiene dos raíces en [0, 1]: a y b es incorrecta. **Concluimos que f(x) no puede tener dos soluciones en el intervalo [0, 1].**

Veamos si f(x) tiene alguna solución en [0, 1].

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \text{es continua en } [0,1], \text{por ser función polinómica.} \\ \text{signo } f(0) > 0 \text{ distinto del signo } f(1) < 0 \end{array}\right. \to \text{Aplicando el teorema de}$$

Bolzano podemos afirmar que $\exists c \in (0,1)/f© = 0$, es decir, c es solución de f(x). Hemos hallado una solución de f(x) y sabemos que no puede tener dos, luego **f(x) tiene exactamente una solución en el intervalo [0, 1].**

10. Considerar la ecuación $x^3 + \lambda x^2 - 2x = 1$ donde $\lambda > 2$ es una constante. Haciendo servir el teorema de Bolzano y el de Rolle, probar que la función admite una única solución no negativa y menor que uno.

Veamos que la ecuación tiene solución.

$x^3 + \lambda x^2 - 2x = 1 \to x^3 + \lambda x^2 - 2x - 1 = 0$.

$$\text{Sea } f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 2x - 1, \left\{\begin{array}{c} f(x) \text{es continua en } [0,1], \text{por ser función polinómica.} \\ \text{Signo de } f(0) \neq \text{signof}(1) \\ f(0) = -1; f(1) = \lambda - 2 \overset{\lambda>2}{\overbrace{>}} 0 \end{array}\right.$$

Aplicando el teorema de Bolzano podemos afirmar que $\exists c \in (0, 1)/f© = 0$, es decir c es solución de la ecuación $x^3 + \lambda x^2 - 2x = 1$.

Veamos que la solución hallada es única.

$$f'(x) = 3x^2 + 2\lambda x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2\lambda + 2\sqrt{\lambda^2+6}}{6}, \text{es positiva y menor que 1.} \\ x = \dfrac{-2\lambda - 2\sqrt{\lambda^2+6}}{6}, \text{es negativa.} \end{cases}$$

La derivada tiene dos raíces, de las cuales una es negativa i la otra está en (0,1). Como solo hay un cero de la derivada entre 0 y 1, y la función cambia de signo entre 0 y 1, la solución hallada es única.

11. Utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, probar que la ecuación tan x = 2x tiene una única solución en el intervalo $\left[\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

tanx = 2x → tanx – 2x = 0. Definimos f(x) = tanx – 2x.

Veamos si f(x) tiene solución en el intervalo $\left[\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$:

f(x) es continua en $\left[\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ por ser suma de funciones continuas en dicho intervalo.

$f\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -1 + \frac{\pi}{2} > 0; f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0 \rightarrow$ signo de $f\left(\frac{-\pi}{4}\right) \neq$ signo de $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Aplicando el teorema de Bolzano podemos afirmar que $\exists\, c \in \left(\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)/f© = 0$. Es decir, c es una solución real, perteneciente al intervalo dado, de la ecuación dada.

Veamos que la solución es única.

(*) Supongamos que f(x) tiene dos soluciones reales en $\left[\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$; c y d.

f(x) es continua en $[a, b]$ por ser suma de funciones continuas en dicho intervalo.

f(x) es derivable en (a, b) por ser suma de funciones derivables en dicho intervalo.

$f© = 0 = f(d)$. Pues c y d son soluciones de f(x).

Aplicando el teorema de Rolle podemos afirmar que $\exists\, \alpha \in (a, b)/f'(\alpha) = 0$. Es decir,

(**) α es solución de f'(x) perteneciente a (c,d) o sea a $\left(\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\text{Estudiamos } f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 2 = 0 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-3\pi}{4} \\ x = \dfrac{-\pi}{4} \\ x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Ninguna solución está en $\left(\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$, la afirmación (**) no es cierta y por tanto la suposición (*) tampoco. Luego f(x) no puede tener dos soluciones. F(x) tiene una sola solución, c.

12. Utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, demostrar que la ecuación x^2 = xsinx + cosx tiene exactamente dos soluciones en el intervalo [-π,π].

x^2 = xsinx + cosx → x^2 – xsinx – cosx = 0 → Definimos f(x) = x^2 – xsinx – cosx.

Veamos que f(x) tiene dos soluciones.

$\left.\begin{array}{l} \text{f(x)es continua en } [-\pi, 0] \text{por ser suma de f. continuas.} \\ \left.\begin{array}{r} f(-\pi) = \pi^2 + 1 > 0 \\ f(0) = -1 > 0 \end{array}\right\} \text{ signo } f(-\pi) \neq \text{signo} f(0) \end{array}\right\}$ Según el teorema de Bolzano,

$\exists\ c\ \in (-\pi, 0)/f© = 0 \rightarrow c$ es solución de $x^2 = \text{xsinx} + \text{cosx}$ perteneciente a $[-\pi, \pi]$.

$\left.\begin{array}{l} \text{f(x)es continua en } [0, \pi] \text{por ser suma de f. continuas.} \\ \left.\begin{array}{r} f(0) = -1 < 0 \\ f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0 \end{array}\right\} \text{ signo } f(0) \neq \text{signo} f(\pi) \end{array}\right\}$ Según el teorema de Bolzano,

$\exists\ d\ \in (0, \pi)/f(d) = 0\ \rightarrow d$ es solución de $x^2 = \text{xsinx} + \text{cosx}$ perteneciente a $[-\pi, \pi]$.

Por tanto, c y d son soluciones de $x^2 - \text{xsinx} - \text{cosx}$ pertenecientes a $[-\pi, \pi]$.

Veamos que la ecuación solo tiene estas dos soluciones pertenecientes a $[-\pi, \pi]$. :

(*) Supongamos que f(x) tiene tres soluciones (c, d y e) pertenecientes a $[-\pi, \pi]$.

$\left.\begin{array}{r} \text{f(x)es continua en } [c, d] \text{ suma de funciones continuas.} \\ \text{f(x)es derivable en } (c, d) \text{suma de funciones derivables.} \\ f(c) = 0 = f(d) \end{array}\right\}$ Aplicando el teorema de Rolle podemos afirmar que $\exists\ \alpha \in (c, d)/f'(\alpha) = 0$. Es decir, α es solución de $f'(x)$ perteneciente a (c,d) o sea a $(-\pi, \pi)$.

$\left.\begin{array}{r} \text{f(x)es continua en } [d, e] \text{ suma de funciones continuas.} \\ \text{f(x)es derivable en } (d, e) \text{suma de funciones derivables.} \\ f(d) = 0 = f(e) \end{array}\right\}$ Aplicando el teorema de Rolle podemos afirmar que $\exists\ \beta \in (d, e)/f'(\beta) = 0$. Es decir, β es solución de $f'(x)$ perteneciente a (d,e) o sea a $(-\pi, \pi)$.

(**) La función $f'(x)$ iene, por tanto, 2 soluciones en $[-\pi, \pi]$.

Estudiamos $f'(x): f'(x) = 2x - (\text{senx} + \text{xcosx}) + \text{senx} = 2x - \text{xcosx} =$

$= x(2 - \text{cosx}) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \text{cosx} = 2\ \nexists \text{ solución.} \end{cases}$ Luego $f'(x)$ solo tiene una solución y no dos como se afirma en (**). La suposición (*) es falsa. La función f(x) no puede tener tres soluciones, según Bolzano tiene dos, concluimos que la ecuación tiene exactamente dos soluciones en $[-\pi, \pi]$.

---

13. Sea a un valor real que está estrictamente entre –1 i 1 (-1 < a < 1). Definimos la función siguiente que depende de a: f (x) = $\frac{1}{3}x^3 + a\,x^2 + x - 3$ Demostrar que la función anterior solo se anula para un valor real de x.

---

1) Demostremos que f(x) tiene solución:

$\left.\begin{array}{r} \text{f(x)es continua en } [0{,}3] \text{por ser función polinómica.} \\ f(0) < 0 \\ f(3) > 0 \end{array}\right\}$ según el Teorema de Bolzano

$$\exists c \in (0{,}3)/f© = 0 \rightarrow \frac{1}{3}c^3 + a.\,c^2 + c - 3 = 0 \rightarrow c \text{ es solución de } f(x).$$

2) Veamos que f(x) no tiene dos soluciones.

*Supongamos que f(x) tiene dos soluciones, c y d.

$$\left.\begin{array}{c}\text{f(x)es continua en }[c,d]\text{por ser función polinómica.}\\ \text{f(x) es derivable en }(c,d)\text{ por ser función polinómica}\\ f© = f(d) = 0\end{array}\right\}\text{** según el Teorema de}$$

Rolle $\exists\alpha \in (c,d)/f'© = 0$

Calculamos f'(x), igualamos a cero y resolvemos: f'(x) = x^2 + 2.a.x + 1 = 0 →

$$\rightarrow x = \frac{-2ª \pm \sqrt{4ª^2 - 4}}{2} \overset{si\ -1<a<1}{\leftrightarrows} \quad 4ª^2 - 4 < 0 \ y\ la\ ecuación \text{ no tiene solución.}$$

Si f'(x) no tiene solución no es cierto la conclusión **y por tanto la suposición * es falsa. Por tanto la función no puede tener dos soluciones.

$$\left.\begin{array}{c}\text{1) la ecuación tiene solución}\\ \text{2) La ecuación no tiene dos soluciones}\end{array}\right\}\rightarrow \text{La ecuación tiene una única solución.}$$

14. Probar razonadamente que la ecuación x^3 – 3x + 1 = 0 tiene una única solución dentro del intervalo abierto (1,2). Calcular la solución con un error menor que una décima.

- Veamos que la ecuación tiene solución.

Sea f(x) = x^3 – 3x + 1.

$$\left.\begin{array}{c}\text{f(x)es continua en }[1,2]\text{por ser función polinómica}\\ \text{signo de }f(1) = -1\text{ es distinto del sigmo de }f(2) = 3\end{array}\right\}\text{Según el teorema de Bolzano}$$

$\exists c \in (1,2)/f© = 0.$ c es solución de la ecuación x^3 – 3x + 1 = 0.

- Debemos demostrar que f(x) no tiene dos soluciones.

Supongamos que f(x) tiene dos soluciones, c y d, en el intervalo (1, 2). Esta suposición será falsa si llegamos a una contradicción (demostración por reducción al absurdo).

$$\left.\begin{array}{c}\text{f(x)es continua en }[c,d]\text{por ser polinomio.}\\ \text{f(x)es derivable en }(c,d)\text{por ser polinomio.}\\ f(c) = 0 = f(d)\end{array}\right\}\text{según el teorema de Rolle}$$

$\exists\alpha \in (c,d)/f'(\alpha) = 0$ → α es un solución de f'(x) perteneciente a (c,d) → α ∈ (1,2) **

Estudiemos la derivada de f(x). f'(x) = $3x^2$- 3 = 0 → x = ±1. Vemos que f'(x) no tiene ninguna solución en (1,2) en contra de la afirmación **. La suposición que f(x) tiene dos soluciones es falsa.

El T. de Bolzano nos da c como solución y el T. de Rolle nos dice que f(x) no puede tener 2 soluciones. C es la única solución de la ecuación x^3 – 3x + 1 = 0.

Para encontrar la solución damos a x valores entre 1 y 2:

f(1,5) < 0 → la solución está entre 1'5 y 2.

f(1'6) > 0→ la solución está entre 1'5 y 1'6. Luego c ≈ 1'5.

6. TEOREMA DEL VALOR MEDIO O DE LAGRANGE.