



SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.



LOS POLINOMIOS.

OPERACIONES, REGLA DE RUFFINI, IDENTIDADES NOTABLES, VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO, TEOREMA DEL RESTO, FACTORIZAR POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS (SIMPLIFICAR, OPERACIONES Y M.C.M. Y M.C.D. DE VARIOS POLINOMIOS).

1. OPERACIONES.

Suma resta y producto de polinomios, estudiado en años anteriores. Es fácil.

a. División de polinomios.

I. Efectúa las divisiones siguientes.

a. $(x^3 + x^2 - x + 1) : (x^2 - 1)$

b. $(x^4 + 3x^3 - x + 1) : (x^2 - x - 1)$

c. $(4x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1) : (2x^2 - x - 1)$

VER VÍDEO <https://youtu.be/GDwcl2h2chs>

$$\begin{array}{r}
 x^3 \quad + x^2 \quad - x \quad + 1 \quad | \quad x^2 - 1 \\
 - x^3 \quad \quad \quad + \quad \quad \quad x + 1 \\
 \hline
 / \quad x^2 \quad / \quad + \\
 \quad \quad - x^2 \quad \quad \quad + \\
 \hline
 \quad \quad / \quad \quad \quad + \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 2
 \end{array}$$



$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 x^4 + 3x^3 - x + 1 \\
 -x^4 + x^3 + x^2 \\
 \hline
 4x^3 + x^2 - x + 1 \\
 -4x^3 + 4x^2 + 4x \\
 \hline
 5x^2 + 3x + 1 \\
 -5x^2 + 5x + 5 \\
 \hline
 8x + 6
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 x^2 - x - 1 \\
 x^2 + 4x + 5
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 4x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1 \\
 -4x^4 + 2x^3 + 2x^2 \\
 \hline
 4x^3 + x^2 - x + 1 \\
 -4x^3 + 2x^2 + 2x \\
 \hline
 3x^2 + x + 1 \\
 -3x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \\
 \hline
 \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 2x^2 - x - 1 \\
 2x^2 + 2x + \frac{3}{2}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

2. Hallar a y b para que la división $x^3 - 3x^2 + ax - b : x^2 + 1$ sea exacta.

VER VÍDEO https://youtu.be/7eI_aoSPpEg

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 + a \cdot x - b \\
 -x^3 \\
 \hline
 -3x^2 + (a-1)x - b \\
 3x^2 \\
 \hline
 (a-1)x - b + 3
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 x^2 + 1 \\
 x - 3
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$(a-1)x + 3 - b = 0x + 0 \begin{cases} a-1 = 0 \rightarrow a = 1 \\ 3-b = 0 \rightarrow b = 3 \end{cases}$$

2. REGLA DE RUFFINI

Si el divisor es del tipo $x \pm a$, también se puede hacer aplicando la regla de Ruffini.

3. Efectúa las divisiones siguientes.

a. $(x^4 + 3x^3 - x + 1) : (x - 1)$

b. $(3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 4) : (x - 2)$

c. $(4x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 2x + 5) : (x + 2)$

VER VÍDEO <https://youtu.be/SItQpZTg4zM>



Dividimos como en los ejemplos anteriores.

Aplicamos la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 3x^3 - x + 1 \\
 -x^4 + x^3 \\
 \hline
 4x^3 - x + 1 \\
 -4x^3 + 4x^2 \\
 \hline
 4x^2 - x + 1 \\
 -4x^2 + 4x \\
 \hline
 3x + 1 \\
 -3x + 3 \\
 \hline
 4
 \end{array}$$

$\overset{*}{\underbrace{1}}$	1	3	0	-1	1
↓	$\overset{1.1}{\underbrace{1}}$	$\overset{4.1}{\underbrace{4}}$	$\overset{4.1}{\underbrace{4}}$	$\overset{3.1}{\underbrace{3}}$	
	1	$\overset{3+1}{\underbrace{4}}$	$\overset{0+4}{\underbrace{4}}$	$\overset{-1+4}{\underbrace{3}}$	$\overset{1+3}{\underbrace{4}}$
	x^3	x^2	x		

Cociente: $1x^3 + 4x^2 + 4x + 3$;
Resto: 4

* $x - 1 \rightarrow$ El número cambiado de signo, es decir 1

$3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 4$ $\underbrace{\quad\quad\quad}_{x - 2}$

Aplicamos la regla de Ruffini

$\overset{*}{\underbrace{2}}$	3	-2	2	-1	4
↓	$\overset{3.2}{\underbrace{6}}$	$\overset{4.2}{\underbrace{8}}$	$\overset{10.2}{\underbrace{20}}$	$\overset{19.2}{\underbrace{38}}$	
	3	$\overset{-2+6}{\underbrace{4}}$	$\overset{2+8}{\underbrace{10}}$	$\overset{-1+20}{\underbrace{19}}$	$\overset{4+38}{\underbrace{42}}$
	x^3	x^2	x		

cociente: $3x^3 + 4x^2 + 10x + 19$; resto: 42

* $x - 2 \rightarrow$ El número cambiado de signo, es decir 2

$4x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 2x + 5$ $\underbrace{\quad\quad\quad}_{x + 2}$

Aplicamos la regla de Ruffini

$\overset{*}{\underbrace{-2}}$	4	-2	0	3	-2	5
↓	$\overset{4}{\underbrace{-8}}$	$\overset{20}{\underbrace{-8}}$	$\overset{-40}{\underbrace{20}}$	$\overset{74}{\underbrace{-40}}$	$\overset{-144}{\underbrace{74}}$	
	4	$\overset{-10}{\underbrace{-10}}$	$\overset{20}{\underbrace{20}}$	$\overset{-37}{\underbrace{-37}}$	$\overset{72}{\underbrace{72}}$	$\overset{-139}{\underbrace{-139}}$
	x^5	x^4	x^3	x^2	x	

cociente: $4x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 37x + 72$; resto: -139

* $x + 2 \rightarrow$ El número cambiado de signo, es decir -2

4. Efectúa la división siguiente $(x^4 + 3x^3 - x + 1) : (2x - 1)$

VER VÍDEO <https://youtu.be/uXXNuf2iJec>

$(x^4 + 3x^3 - x + 1) : (2x - 1)$ es lo mismo que $(\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) : (x - \frac{1}{2})$ y esta división se hace por Ruffini como en el ejercicio anterior.

3. IDENTIDADES NOTABLES

$$\text{IDENTIDADES NOTABLES} \begin{cases} (A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2 \\ (A - B)^2 = A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2 \\ (A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2 \end{cases}$$

5. Efectúa las operaciones siguientes.

- $(x + 1)^2$
- $(x - 3)^2$
- $(2x + 4)^2$
- $(3x - 3)^2$
- $(x + 2) \cdot (x - 2)$
- $(5x + 2) \cdot (5x - 2)$

VER VIDEO https://youtu.be/Rr_QGj2f608

- $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
- $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$
- $(2x + 4)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 4 + 4^2 = 4x^2 + 16x + 16$
- $(3x - 3)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 3 + 3^2 = 9x^2 - 18x + 9$
- $(x + 2) \cdot (x - 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$
- $(5x + 2) \cdot (5x - 2) = (5x)^2 - 2^2 = 25x^2 - 4$

6. Efectúa las operaciones siguientes.

- $(2x - y)^2$
- $(3a + 2b)^2$
- $(x - 1)^2 - (x + 1)^2$
- $x \cdot (x + 2)^2 - (x + 1) \cdot (x + 2)$
- $(x + 2) \cdot (x - 2) - (2x - 3)^2$
- $(2x^2 - 3x)^2 - (3x^2 + 2x)^2$

VER VIDEO <https://youtu.be/sVws0MzYcCs>

- $(2x - y)^2 = 4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = 4x^2 - 4x \cdot y + y^2$
- $(3a + 2b)^2 = 9a^2 + 2 \cdot 3a \cdot 2b + 4b^2 = 9a^2 + 12a \cdot b + 4b^2$
- $(x - 1)^2 - (x + 1)^2 = x^2 - 2x + 1 - (x^2 + 2x + 1) = x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = -4x$
- $x \cdot (x + 2)^2 - (x + 1) \cdot (x + 2) = x \cdot (x^2 + 4x + 4) - (x^2 + 2x + x + 2) = x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 2x - x - 2 = x^3 + 3x^2 + x - 2$
- $(x + 2) \cdot (x - 2) - (2x - 3)^2 = x^2 - 4 - (4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 9) = x^2 - 4 - 4x^2 + 12x - 9 = -3x^2 + 12x - 13$



$$f. (2x^2 - 3x)^2 - (3x^2 + 2x)^2 = 4x^4 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 3x + 9x^2 - (9x^4 + 2 \cdot 3x^2 \cdot 2x + 4x^2) = -5x^4 - 24x^3 + 5x^2$$

4. VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO.

7. Hallar el valor numérico de los polinomios siguientes para el valor de x indicado.

a. $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ para $x = -1$.

b. $P(x) = 3x^4 - x^2 + 3x + 2$ para $x = 2$.

c. $P(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ para $x = -2$

VER VÍDEO <https://youtu.be/MQkuA93RbFs>

a. $P(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 1 = -1 - 2 - 1 - 1 = -5$

b. $P(2) = 3 \cdot (2)^4 - 2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = 3 \cdot 16 - 4 + 6 + 2 = 52$

c. $P(-2) = (-2)^5 - 3 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 1 = -32 + 24 + 8 + 6 + 1 = 7$

5. TEOREMA DEL RESTO.

El Teorema del resto dice que el resto de dividir un polinomio $P(x)$ entre un binomio $x + a$ coincide con el valor numérico del polinomio para $x = -a$

VER VÍDEO <https://youtu.be/EDPtmnSMkMQ>

$$3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 4 \quad | \quad x - 2$$

Aplicamos la regla de Ruffini

*	3	-2	2	-1	4
2	↓	3.2 6	4.2 8	10.2 20	19.2 38
	3	-2+6 4	2+8 10	-1+20 19	4+38 42
	x^3	x^2	x		

cociente: $3x^3 + 4x^2 + 10x + 19$; resto: 42

* $x - 2 \rightarrow$ El número cambiado de signo, es decir 2

$P(2) = 3 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 + 4 = 48 - 16 + 8 - 2 + 4 = 42$

Observa que el resto, 42, coincide con el valor numérico $P(2) = 42$

8. a. Hallar k para que la división de $p(x) = x^3 - kx^2 + 3x - 2$ entre $x + 2$ sea exacta.

b. Hallar k para que la división de $p(x) = x^3 - 2kx^2 + 4x + 3$ entre $x + 3$ tenga resto 4.

VER VÍDEO https://youtu.be/8AD0Z1i_QOg

a. Sea exacta significa que el resto es igual a cero. Sustituyo en $p(x)$ la x por -2, igualo a cero (resto) y resuelvo.

$p(-2) = (-2)^3 - k \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 2 = 0 \rightarrow k = -4$

b. Sustituyo en $p(x)$ la x por -3, igualo a 4 (resto) y resuelvo.

$p(-3) = (-3)^3 - 2k \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 3 = 4 \rightarrow k = -7/3$

9. Hallar a y b para que la división de $p(x) = x^3 - ax + b$ entre $x - 1$ de exacta y de resto 2 al dividir por CARLOS ALCOVER GARAU. LICENCIADO EN CIENCIAS QUÍMICAS (U.I.B.) Y DIPLOMADO EN TECNOLOGÍA DE ALIMENTOS (I.A.T.A.).

6

 $x + 1$.VER VÍDEO <https://youtu.be/aLhObHsDoWQ>

Sustituyo en $p(x)$ la x por $+ 1$, igualo a cero (resto) y tengo una ecuación con dos incógnitas.

Sustituyo en $p(x)$ la x por $- 1$, igualo a 2 (resto) y tengo otra ecuación con dos incógnitas.

$$\begin{cases} p(1) = 1 - a + b = 0 \\ p(-1) = -1 + a + b = 2 \end{cases} \text{ sistema } \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

6. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS.

a. Polinomios de primer grado.

Si se puede sacar factor común se saca sino ya está factorizado.

10. Factoriza los polinomios siguientes.

a. $P(x) = 3x - 6$

b. $P(x) = x + 2$

c. $P(x) = 4x - 16$

d. $P(x) = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$

VER VÍDEO https://youtu.be/Xvu_BTbtQac

a. $P(x) = 3 \cdot (x - 2)$

b. $P(x) = x + 2$

c. $P(x) = 4 \cdot (x - 4)$

d. $P(x) = \frac{1}{3} \cdot (x - 2)$

b. Polinomios de segundo grado.

$P(x) = Ax^2 + Bx + C \rightarrow$ Sacar factor común x si se puede, sino resolver la ecuación de segundo grado $Ax^2 + Bx + C = 0$ y factorizar según el número de soluciones.

11. Factorizar los siguientes polinomios.

a. $P(x) = 3x^2 - 5x$

b. $P(x) = x^2 - 3x + 2$

c. $P(x) = 3x^2 - 7x + 4$

d. $P(x) = x^2 - 6x + 9$

e. $P(x) = x^2 + x + 1$

f. $P(x) = 3x^2 - 3$

VER VÍDEO https://youtu.be/y4zVy_BPL1g

a. $p(x) = 3x^2 - 5x$. Basta sacar factor común: $p(x) = x \cdot (3x - 5)$

b. $p(x) = x^2 - 3x + 2$

7

Resolvemos $x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \overset{\text{dos soluciones}}{\Leftrightarrow} p(x) = (x - 1) \cdot (x - 2)$

c. $p(x) = 3x^2 - 7x + 4$

Resolvemos $3x^2 - 7x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases} \overset{\text{dos soluciones}}{\Leftrightarrow} p(x) = 3 \cdot (x - 1) \cdot \left(x - \frac{4}{3}\right)$

d. $p(x) = x^2 - 6x + 9$. Si nos damos cuenta de que es una identidad notable podemos escribir $p(x) = (x - 3)^2$. En cualquier caso, podemos hacer:

Resolvemos la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow \overbrace{x = 3}^{\substack{\text{solución} \\ \text{única.} \\ \text{el polinomio} \\ \text{es un} \\ \text{binomio} \\ \text{al cuadrado}}} \overset{\text{solución doble}}{\Leftrightarrow} p(x) = (x - 3)^2$

e. $p(x) = x^2 + x + 1$

Resolvemos la ecuación $x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow$ No hay solución

\rightarrow El polinomio no se factoriza

f. $p(x) = 3x^2 - 3 = 3 \cdot (x^2 - 1)$. Si nos damos cuenta de que es una identidad notable podemos escribir $p(x) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$. En cualquier caso, podemos hacer:

Resolvemos la ecuación $3x^2 - 3 = 0$

$\rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \overset{\text{dos soluciones}}{\Leftrightarrow} p(x) = 3 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

c. Polinomios de grado superior a 2.

Primero sacamos factor común, si se puede. Luego tomamos los divisores del término independiente y aplicamos la regla de Ruffini. Al llegar a un polinomio de grado 2, no seguimos con Ruffini, resolvemos la ecuación de 2º grado. Ver ejemplos:

12. Factorizar el polinomio siguiente $x^4 - 5x^2 + 4$

VER VÍDEO <https://youtu.be/bdJKUg03R8o>

$$p(X) = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$$

13. Factorizar el siguiente polinomio. $P(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 36x - 27$

VER VÍDEO <https://youtu.be/YOgTLBAmSNA>

$$P(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 36x - 27 = (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 3)^2$$

14. Factorizar el siguiente polinomio. $P(x) = 2x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 9x$

VER VÍDEO <https://youtu.be/y3y1K0bZ818>

$$P(x) = 2x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 9x = x \cdot (x + 1) \cdot (2x^2 + 9)$$

15. Factorizar el siguiente polinomio. $P(x) = 2x^5 - 7x^4 + 9x^3 - 5x^2 + x$

VER VÍDEO <https://youtu.be/CwPHdVqHumc>

$$P(x) = 2x^5 - 7x^4 + 9x^3 - 5x^2 + x = x \cdot (x - 1)^3 \cdot (2x - 1)$$

16. Factorizar el siguiente polinomio. $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x \rightarrow p(x) = x \cdot (x^2 - 4x + 3) = x \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$$

Las raíces del polinomio son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3$

17. Factorizar el siguiente polinomio. $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$, no puedo sacar factor común. Tomamos los divisores del término independiente: ± 1 y ± 2

Y aplicamos la regla de Ruffini:

Probamos el 1:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & & & \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x - 1) \cdot \underbrace{(1x^2 + 3x + 2)}_{2^\circ \text{ grado}} = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$$

Resolvemos
la ecuación.
 $x = -1, x = -2$

Las raíces del polinomio son $x = 1$, $x = -1$ y $x = -2$

18. Factorizar el siguiente polinomio $p(x) = x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$

$p(x) = x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$, no puedo sacar factor común. Tomamos los divisores del término independiente: ± 1 , ± 2 y ± 4 . Y aplicamos la regla de Ruffini:

Probamos el 1:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 6 & 13 & 12 & 4 \\ 1 & & & & & \\ \hline & 1 & 7 & 20 & 32 & 36 \rightarrow \text{NO} \end{array}$$

Probamos el -1

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 6 & 13 & 12 & 4 \\ -1 & & & & & \\ \hline & 1 & 5 & 8 & 4 & 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x + 1) \cdot (1x^3 + 5x^2 + 8x + 4)$$

Volvemos a probar el -1, no sale. Probamos el 2

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & & & & \\ \hline & 1 & 7 & 22 & 40 \rightarrow \text{NO} \end{array}$$

Probamos el -2

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 8 & 4 \\ -2 & & & & \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$



$$p(x) = (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot \underbrace{(1x^2 + 3x + 2)}_{\substack{2^\circ \text{ grado.} \\ \text{Resolvemos} \\ \text{la ecuación.} \\ x = -1, x = -2}} = (x + 1)^2 \cdot (x + 2)^2$$

Las raíces del polinomio son $x = -1$ (doble) y $x = -2$ (doble).

19. Factorizar el siguiente polinomio $p(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$

$p(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$, no puedo sacar factor común. Tomamos los divisores del término independiente: ± 1 . Y aplicamos la regla de Ruffini:

Probamos el 1

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ & & 2 & 1 & -1 \\ \hline & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x - 1) \cdot \underbrace{(2x^2 + 1x - 1)}_{\substack{2^\circ \text{ grado.} \\ \text{Resolvemos} \\ \text{la ecuación.} \\ x = -1, x = \frac{1}{2}}}$$

$$= \underbrace{2}_{*} (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot \underbrace{\left(x - \frac{1}{2}\right)}_{\text{operando}} \equiv (x - 1) \cdot (x + 1) (2x - 1)$$

* El 2 (coeficiente del monomio de mayor grado, $2 \cdot x^3$) aparece en la factorización. Las raíces del polinomio son $x = 1$, $x = -1$ y $x = 1/2$

20. Factorizar el siguiente polinomio $p(x) = 2x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2$

$p(x) = 2x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 = x^2 \cdot (2x^3 + x^2 - 2x - 1)$, hemos sacado factor común, ahora factorizamos el polinomio $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Probamos el 1:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ & & 2 & 3 & 1 \\ \hline & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

$$p(x) = x^2 \cdot (x - 1) \cdot \underbrace{(2x^2 + 3x + 1)}_{\substack{2^\circ \text{ grado.} \\ \text{Resolvemos} \\ \text{la ecuación.} \\ x = -1, x = -\frac{1}{2}}} = \underbrace{2}_{*} x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) = \underbrace{x^2}_{\text{operando}} \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) (2x + 1)$$

* El 2 (coeficiente del monomio de mayor grado, $2 \cdot x^3$) aparece en la factorización. Las raíces del polinomio son $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ y $x = -1/2$

7. FRACCIONES ALGEBRAICAS

a. Simplificar fracciones algebraicas.

21. Simplifica la siguiente fracción algebraica.

$$\frac{4x - 16}{x^2 - 3x - 4}$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/RgxFsmQjkJE>

$$\frac{4x - 16}{x^2 - 3x - 4} = \frac{4 \cdot (x-4)}{(x+1) \cdot (x-4)} = \frac{4}{x+1}$$

22. Simplifica la siguiente fracción algebraica.

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 4x^2 - x + 4}$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/ZKf855g-9wM>

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 4x^2 - x + 4} = \frac{(x-1) \cdot (x-4)}{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-4)} = \frac{1}{x+1}$$

23. Simplifica la siguiente fracción algebraica.

$$\frac{x^2 - 8x + 7}{x^3 - 7x^2 - x + 7}$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/WGeNwt51MQI>

$$\frac{x^2 - 8x + 7}{x^3 - 7x^2 - x + 7} = \frac{(x-1) \cdot (x-7)}{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-7)} = \frac{1}{x+1}$$

24. Simplifica la siguiente fracción algebraica.

$$\frac{3x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{3x^3 - x^2 - 3x + 1}$$

$$\frac{3x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{3x^3 - x^2 - 3x + 1} = \frac{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (3x-2)}{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (3x-1)} = \frac{(3x-2)}{(3x-1)}$$

25. Simplifica la siguiente fracción algebraica.

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^4 + x^3 - x - 1}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^4 + x^3 - x - 1} = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2 + x + 1)} = \frac{1}{(x-1) \cdot (x+1)}$$

26. Simplifica la siguiente fracción algebraica.

$$\frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{x^3 + 5x^2 - x - 5}$$

$$\frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{x^3 + 5x^2 - x - 5} = \frac{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+4)}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+5)} = \frac{x+4}{x+5}$$

27. Simplifica la siguiente fracción algebraica.

$$\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 10x^2 + 9}$$

$$\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 10x^2 + 9} = \frac{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-2)}{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+3) \cdot (x-3)} = \frac{(x+2) \cdot (x-2)}{(x+3) \cdot (x-3)}$$

28. Simplifica la siguiente fracción algebraica.

$$\frac{x^3 + x^2 - 2x - 2}{x^3 - x^2 - 2x + 2}$$

$$\frac{x^3 + x^2 - 2x - 2}{x^3 - x^2 - 2x + 2} = \frac{(x+1) \cdot (x+\sqrt{2}) \cdot (x-\sqrt{2})}{(x-1) \cdot (x+\sqrt{2}) \cdot (x-\sqrt{2})} = \frac{x+1}{x-1}$$

b. M.C.M. y M.C.D. de varios polinomios. Operaciones con fracciones algebraicas

29. Hallar el M.C.M y el M.C.D. de los polinomios siguientes: $x^4 - 5x^2 + 4$, $x^4 + x^3 - x - 1$ y $3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

VER VÍDEO <https://youtu.be/MC20ISGKdi8>

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-2)$$

$$x^4 + x^3 - x - 1 = (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

$$3x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = (x+1) \cdot (x-1) \cdot (3x-2)$$

$$\text{M.C.M.} = (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-2) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (3x-2)$$

$$\text{M.C.D.} = (x+1) \cdot (x-1)$$

30. Realiza la siguiente operación con fracciones algebraicas.

a. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$

b. $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x^2-1}$

VER VÍDEO <https://youtu.be/KkcRSxVzbFU>

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = \frac{x^2 - x - 1}{\underbrace{x^3}_{\text{M.C.M. de } x, x^2, x^3}}$$

$$\frac{x}{x-1} + \frac{1}{\underbrace{x^2-1}_{\substack{\text{factorizamos} \\ \text{no se puede factorizar}}}} = \frac{x}{x-1} + \frac{1}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{x \cdot (x+1) + 1}{\underbrace{(x-1) \cdot (x+1)}_{\text{M.C.M. de } x-1 \text{ y } x^2-1}}$$

$$= \frac{x^2 + x + 1}{(x-1) \cdot (x+1)}$$

31. Realiza la siguiente operación con fracciones algebraicas.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 2x} + \frac{1}{x^2 - 2x}$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/i-oVhpVTpCc>

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\underbrace{x^2+2x}_{\text{factorizar}}} + \frac{1}{\underbrace{x^2-2x}_{\text{factorizar}}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x \cdot (x+2)} + \frac{1}{x \cdot (x-2)} =$$

$$\frac{(x+2) \cdot (x-2) - (x-2) + x+2}{\underbrace{x \cdot (x+2) \cdot (x-2)}_{\text{M.C.M. de } x, x^2+2x \text{ y } x^2-2x}} = \frac{x^2}{x \cdot (x+2) \cdot (x-2)} = \frac{x}{(x+2) \cdot (x-2)}$$

32. Realiza la siguiente operación con fracciones algebraicas.

a. $\frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$

b. $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$

VER VÍDEO <https://youtu.be/gFQ-pZukOog>

a. $\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-1}$

b. $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{x-1}{x}}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} = \frac{1}{\frac{x-1-x}{x-1}} = \frac{1}{\frac{-1}{x-1}} = 1 - x$

33. Realiza la siguiente operación con fracciones algebraicas.

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} : \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4x + 4}$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/7zap-wwBX08>

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} : \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x+2) \cdot (x-2)}{x \cdot (x-2)} : \frac{x \cdot (x+2)}{(x-2)^2} = \frac{(x+2) \cdot (x-2) \cdot (x-2)^2}{x \cdot (x-2) \cdot x \cdot (x+2)} =$$

$$= \frac{(x-2)^2}{x^2}$$

34. Realiza la siguiente operación con fracciones algebraicas.

$$\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-x}\right) : \left(\frac{x}{x^2-1} + \frac{x}{x-1}\right)$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/-HXOr5nb-VA>

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-x}\right) : \left(\frac{x}{x^2-1} + \frac{x}{x-1}\right) = \\ & = \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x \cdot (x-1)}\right) : \left(\frac{x}{(x+1) \cdot (x-1)} + \frac{x}{x-1}\right) = \frac{x^2-1}{x \cdot (x-1)} : \frac{x+x \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot (x-1)} = \\ & = \frac{\overbrace{x^2-1}^{(x+1) \cdot (x-1)}}{x \cdot (x-1)} : \frac{\overbrace{x^2+2x}^{x \cdot (x+2)}}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot \cancel{(x-1)}}{x^2 \cdot (x+2) \cdot \cancel{(x-1)}} = \frac{(x+1)^2 \cdot (x-1)}{x^2 \cdot (x+2)} \end{aligned}$$