SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

AZAR Y PROBABILIDAD.

SUCESOS ALEATORIOS. PROBABILIDAD DE UN SUCESO y LEY DE LAPLACE PARA EXPERIENCIAS REGULARES. DIAGRAMA DE ÁRBOL.

1. SUCESOS ALEATORIOS.

1. En una urna hay 3 bolas negras, 4 blancas y 5 rojas. Elegimos una bola al azar y anotamos su color.

a. Se trata de un experimento aleatorio.

b. Escribe el espacio muestral.

c. Inventa tres sucesos.

d. ¿Cuántos posibles sucesos hay?

e. Tomando dos de los 3 sucesos del apartado C, escribe su intersección, su unión, su diferencia y el complementario o contrario de ambos.

f. ¿Cuál sería el suceso seguro? Pon un ejemplo de suceso imposible.

a. Si se trata de un experimento aleatorio pues en el color de la bola elegida interviene el azar.

b. $\{N, B, R\}$

c. $A = \{N, R\}; B = \{N\}; C = \{N, B, R\} = \Omega$

d. Llamamos suceso a cualquier subconjunto del espacio muestral por tanto el número de sucesos coincidirá con el número de subconjuntos del espacio muestral. Número de sucesos $= 2^n$, siendo n el número de elementos del espacio muestral. En este caso $2^3 = 8$ sucesos: $\{N, B, R\}\{N, R\}\{N, B\}\{B, R\}\{N\}\{B\}\{R\}\emptyset$

e. $A = \{N, R\}; B = \{N\} \begin{cases} A \cap B = \{N\} \\ A \cup B = \{N, R\} \\ A - B = \{R\} \\ \bar{A} = \{B\}\ Y\ \bar{B} = \{B, R\} \end{cases}$

f. Suceso seguro$\{\mathrm{N, B, R}\}$; suceso imposible {sacar bola verde}

2. En una caja tenemos 100 bolígrafos azules. Extraemos un bolígrafo y anotamos su color. ¿Se trata de un experimento aleatorio? ¿y si en la caja hubiera 50 azules y 50 rojos?

a. No se trata de un experimento aleatorio pues en el color del bolígrafo elegido no depende del azar, será seguro azul.

b. Si se trata de un experimento aleatorio pues en el color del bolígrafo elegido interviene el azar.

3. En un cajón tenemos monedas de 1 y 2 €. Elegimos dos monedas al azar y anotamos su valor.

a. Se trata de un experimento aleatorio.

b. Escribe el espacio muestral.

c. Inventa tres sucesos.

d. ¿Cuántos posibles sucesos hay?

e. Tomando dos de los 3 sucesos del apartado C, escribe su intersección, su Unión, su diferencia y el complementario o contrario de ambos.

f. ¿Cuál sería el suceso seguro? Pon un ejemplo de suceso imposible.

a. Si se trata de un experimento aleatorio pues en el valor de la moneda elegida interviene el azar.

b. $\{1,2\}$

c. $A = \{1,2\}; B = \{1\}; C = \{2\}$

d. Llamamos suceso a cualquier subconjunto del espacio muestral por tanto el número de sucesos coincidirá con el número de subconjuntos del espacio muestral. Número de sucesos $= 2^n$, siendo n el número de elementos del espacio muestral. En este caso $2^2 = 4$ sucesos: $\{1,2\}; \{1\}; \{2\}; \emptyset$

e. $A = \{1,2\}; B = \{1\} \begin{cases} A \cap B = \{1\} \\ A \cup B = \{1,2\} \\ A - B = \{1\} \\ \bar{A} = \emptyset \; Y \; \bar{B} = \{2\} \end{cases}$

f. Suceso seguro "sacar 1 o 2". Suceso imposible "sacar una mones de 50 céntimos"

4. Lanzamos dos dados o un dado dos veces y anotamos el valor resultante en cada dado.

a. Se trata de un experimento aleatorio.

b. Escribe el espacio muestral.

c. Inventa tres sucesos.

d. ¿Cuántos posibles sucesos hay?

e. Tomando dos de los 3 sucesos del apartado C, escribe su intersección, su Unión, su diferencia y el complementario o contrario de ambos.

f. ¿Cuál sería el suceso seguro? Pon un ejemplo de suceso imposible.

a. Si se trata de un experimento aleatorio pues en el valor de los dados interviene el azar.

b.

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

c. A: Que la suma de los dados sea 7. {61,52,43,34,25,16}
B: Que ambos sean pares. {22,24,26,42,44,46,62,64,66}
C: Que la suma sea mayor que 9. {64,55,46,65,56,66}

d. d. Llamamos suceso a cualquier subconjunto del espacio muestral por tanto el número de sucesos coincidirá con el número de subconjuntos del espacio muestral. Número de sucesos = 2^n, siendo n el número de elementos del espacio muestral. En este caso 2^{36}.

e. $\begin{cases} B = \{22,24,26,42,44,46,62,64,66\} \\ C = \{64,55,46,65,56,66\} \end{cases}$

$$\begin{cases} B \cap C = \{64,46,66\} \\ B \cup C = \{22,24,26,42,44,46,62,64,66,55,65,56\} \\ B - C = \{22,24,26,42,44,62\} \\ \overline{A} = \text{tomamos E } (\Omega) \text{ y le quitamos A y } \overline{B} = \text{tomamos E } (\Omega) \text{ y le quitamos B} \end{cases}$$

f. Suceso seguro: "suma menor que 13"; suceso imposible "suma mayor que 12"

2. PROBABILIDAD DE UN SUCESO y LEY DE LAPLACE PARA EXPERIENCIAS REGULARES.

5. Lanzamos dos monedas. Calcular la probabilidad de que salgan dos caras; salga al menos una cruz.

$$\text{Espacio muestral: } \begin{Bmatrix} cc \\ cx \\ xc \\ xx \end{Bmatrix} \begin{cases} P(\text{dos c}) = \dfrac{1}{4} \\ P(\text{al menos una x}) = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

6. Lanzamos tres monedas. Calcular la probabilidad de que salgan tres caras; salgan exactamente dos cruces; salgan más caras que cruces.

$$\text{Espacio muestral: } \begin{Bmatrix} ccc \\ ccx \\ cxc \\ xcc \\ cxx \\ xcx \\ xxc \\ xxx \end{Bmatrix} \begin{cases} P(\text{tres caras}) = \dfrac{1}{8} \\ P(\text{exactamente dos cruces}) = \dfrac{3}{8} \\ P(\text{mas c que x}) = \dfrac{4}{8} \end{cases}$$

7. Lanzamos cuatro monedas. Calcular la probabilidad de que salgan exactamente tres caras; salgan exactamente dos cruces; salgan más caras que cruces.

Espacio muestral: $\left\{\begin{array}{ll} \text{cccx} & \text{cccc} \\ \text{ccxx} & \text{ccxc} \\ \text{cxcx} & \text{cxcc} \\ \text{xccx} & \text{xccc} \\ \text{cxxx} & \text{cxxc} \\ \text{xcxx} & \text{xcxc} \\ \text{xxcx} & \text{xxcc} \\ \text{xxxx} & \text{xxxc} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} P(\text{tres caras}) = \dfrac{4}{16} \\ P(\text{exactamente dos cruces}) = \dfrac{6}{16} \\ P(\text{mas c que x}) = \dfrac{5}{16} \end{array}\right.$

Las columnas rojas son el lanzamiento de tres monedas. En la primera añadimos una x a cada una de ellas y en la segunda añadimos una cara. Así obtenemos el espacio muestral para cuatro monedas.
Si aumentamos el número de monedas lanzadas, trabajar con el espacio muestral es casi imposible. Trabajaremos con distribución binomial. Lo veremos más adelante.

8. Lanzamos 2 dados de 6 caras no trucados y consideramos los sucesos siguientes: A "la suma de los resultados de los 2 dados es 7" y B "el producto de los resultados de los 2 dados es impar"

a. Calcula la probabilidad de cada uno de ellos.

b. ¿Son independientes los 2 sucesos?

VER VIDEO https://youtu.be/gdVPUqV0bG8

Espacio muestral:

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

11	12	13	14	15	16	$P(A) = P(\text{suma} = 7) = \dfrac{6}{36}$
21	22	23	24	25	26	
31	32	33	34	35	36	
41	42	43	44	45	46	
51	52	53	54	55	56	
61	62	63	64	65	66	

11	12	13	14	15	16	$P(B) = P(\text{producto impar}) = \dfrac{9}{36}$
21	22	23	24	25	26	
31	32	33	34	35	36	
41	42	43	44	45	46	
51	52	53	54	55	56	
61	62	63	64	65	66	

b. $P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \rightarrow$ Son dependientes.

9. Un dado se carga de manera que la probabilidad de obtener un 6 es de 1/2 y las probabilidades de obtener cada una de las otras caras son iguales a p. Se lanza el dado,
calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a. Se obtiene un dos.
b. No se obtiene ningún tres.
c. Se obtiene un número par.
d. Se obtiene un número impar.

$$\overbrace{p + p + p + p + p = 0{,}5}^{\text{Probabilidad de no sacar un 6}} \rightarrow p = 0{,}1$$

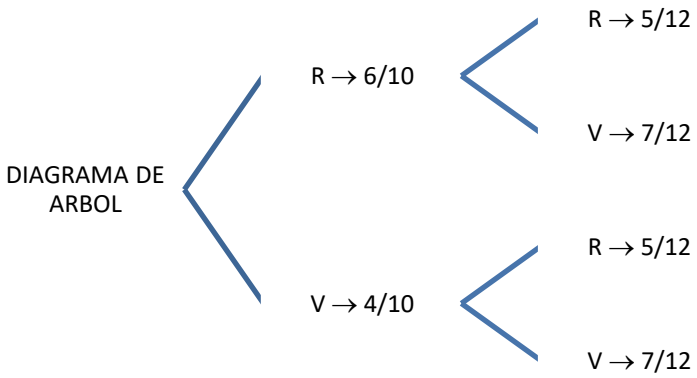
a. $P(2) = 0{,}1$
b. $P(\text{ningún } 3) = 1 - P(3) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$
c. $P(\text{par}) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}5 = 0{,}7$
d. $P(\text{impar}) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}3$

3. DIAGRAMA DE ÁRBOL.

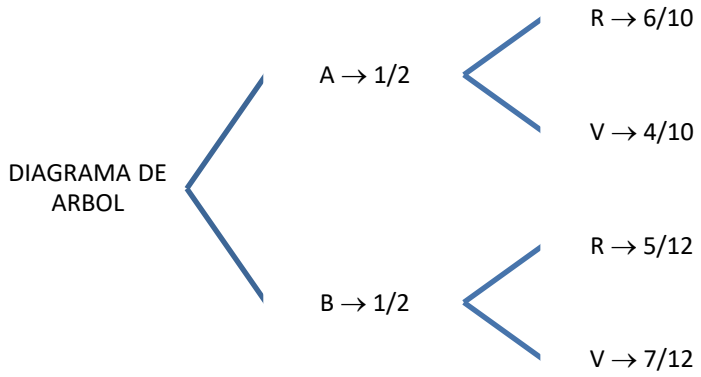
10. Haz un diagrama de árbol para los siguientes casos. En una urna A tenemos 6 bolas rojas y 4 bolas verdes, en una urna B tenemos 5 bolas rojas y 7 bolas verdes.

a. Extraemos una bola de A y a continuación una bola de B.
b. Elegimos una urna al azar y extraemos una bola.
c. Tomamos una bola de A y la introducimos en B, a continuación, sacamos una bola de B.
d. En el caso a, calcular la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.
e. En el caso b, calcular la probabilidad de que la bola sea roja.
f. En el caso c, calcular la probabilidad de que las dos bolas sean rojas.

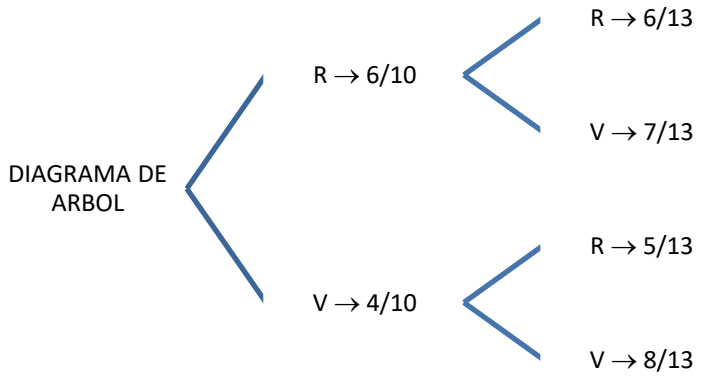
a.



b.



c.



d.

$$\mathrm{P(mismo\ color)} = \mathrm{P(R,R)} + \mathrm{P(V,V)} = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{12} + \frac{4}{10}\cdot\frac{7}{12} = \frac{29}{60}$$

e.

$$\mathrm{P(R)} = \mathrm{P}(A,\mathrm{R}) + \mathrm{P(B,R)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{12} = \frac{61}{120}$$

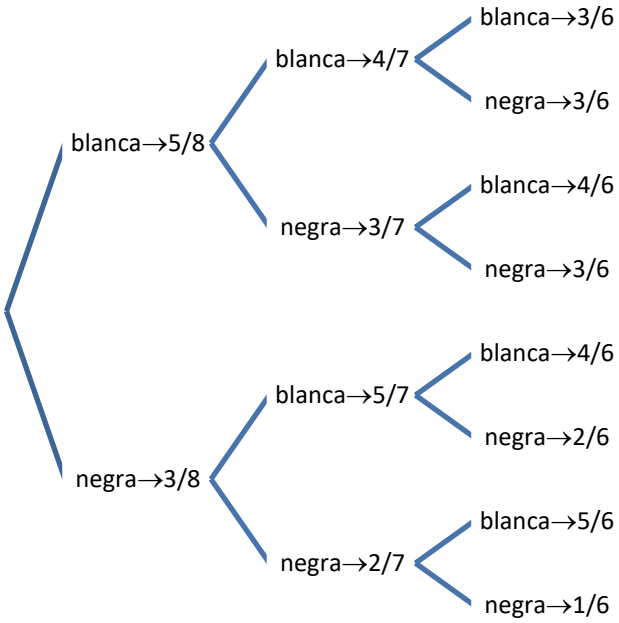
f.

$$\mathrm{P(R,R)} = \mathrm{P}(R,\mathrm{R}) + \mathrm{P}(V,\mathrm{R}) = \frac{6}{10}\cdot\frac{6}{13} + \frac{4}{10}\cdot\frac{5}{13} = \frac{28}{65}$$

11. Una urna contiene 5 bolas blanca y 3 negras. Se extraen 3 bolas al azar sin reemplazamiento.

a) Calcula la probabilidad de que se extraigan 2 blancas y 1 negra.

b) Calcula la probabilidad de que se extraiga al menos 1 negra.



$$P(2b \text{ y } 1n) = P(b \cap b \cap n) + P(b \cap n \cap b) + P(n \cap b \cap b) = \frac{5}{8}\frac{4}{7}\frac{3}{6} + \frac{5}{8}\frac{3}{7}\frac{4}{6} + \frac{3}{8}\frac{5}{7}\frac{4}{6} = \frac{15}{28}$$

$$P(\text{al menos } 1n) = 1 - P(\text{ninguna } n) = 1 - P(b \cap b \cap b) = 1 - \frac{5}{8}\frac{4}{7}\frac{3}{6} = \frac{23}{28}$$

12. Tenemos una baraja española de 40 cartas si extraemos una carta al azar calcular la probabilidad de que la carta elegida

a. sea de oros

b. sea un caballo

c. sea una figura

a. En la baraja de 40 cartas hay 10 que son oros. $P(\text{oro}) = 10/40 = 1/4$

b. En la baraja de 40 cartas hay 4 que son caballos. $P(\text{caballo}) = 4/40 = 1/10$

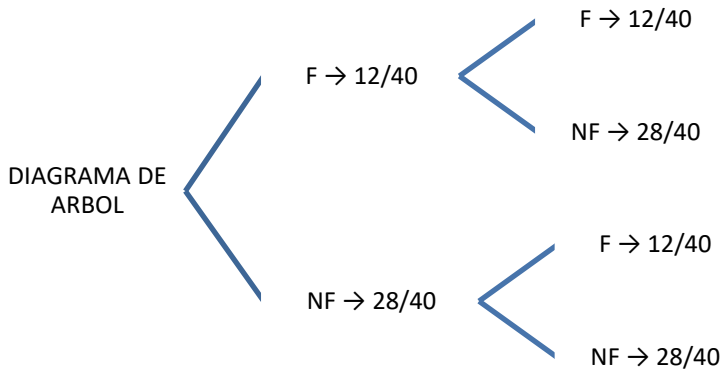
c. En la baraja de 40 cartas hay 12 que son figuras. $P(\text{figura}) = 12/40 = 3/10$

13. Extraemos dos cartas de una baraja española de 40 cartas.

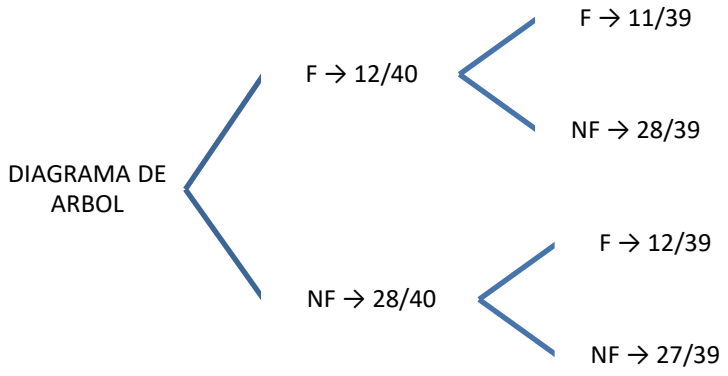
a. Hallar la probabilidad de que ambas sean figuras, considerando con y sin reemplazamiento.

b. Hallar la probabilidad de que ambas sean de oros, considerando con y sin reemplazamiento.

a.

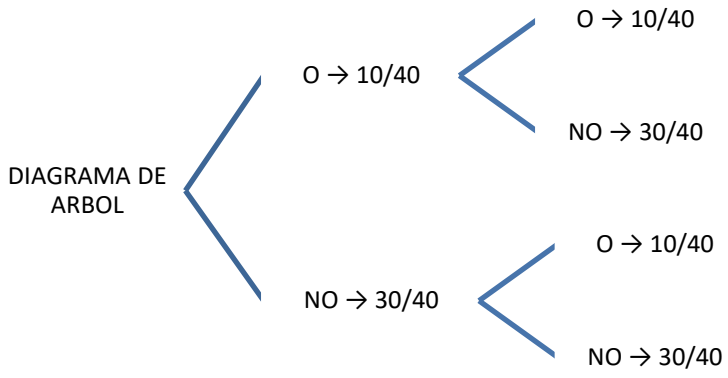


$$P(F_I \cap F_2) = \frac{12}{40} \cdot \frac{12}{40} = \frac{9}{100}$$

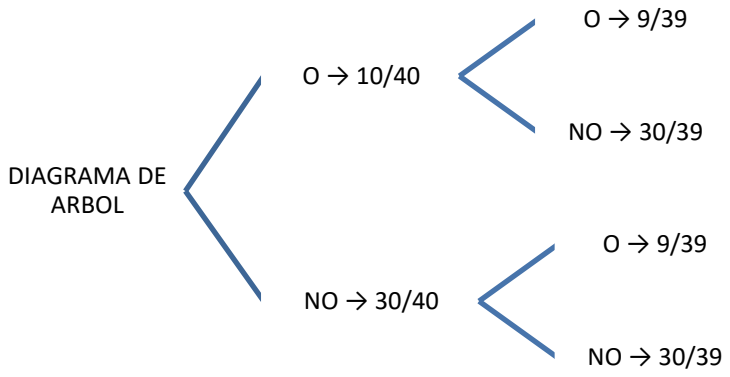


$$P(F_I \cap F_2) = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} = \frac{11}{130}$$

b.



$$P(O_I \cap O_2) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{16}$$



$$P(O_I \cap O_2) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$$

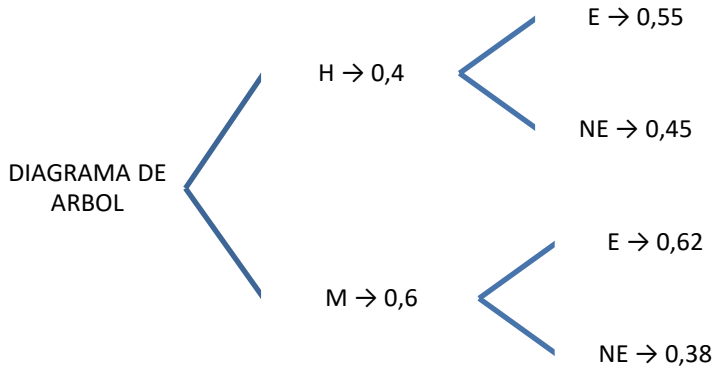
14. En una empresa el 40 % de los trabajadores son hombres. De estos el 55 % tiene estudios superiores. El 38 % de las mujeres de la empresa no tiene estudios superiores.

a. Realiza un diagrama de árbol para expresar los datos del problema.

b. Si elegimos un trabajador al azar, probabilidad de que sea un hombre con estudios superiores.

c. Si elegimos un trabajador al azar, probabilidad de que no tenga estudios superiores.

a.



b. $P(H \cap E) = 0{,}4 \cdot 0{,}55 = 022$

c. $P(NE) = P(H \cap NE) + P(M \cap NE) = 0{,}4 \cdot 0{,}45 + 0{,}6 \cdot 0{,}38 = 0{,}408$

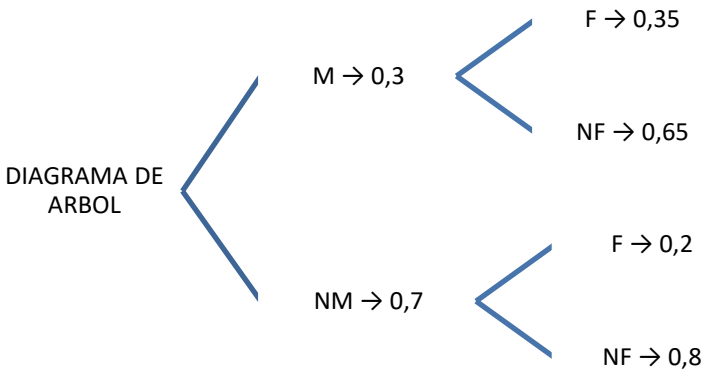
15. En mi clase el 30% han aprobado las matemáticas. De éstos el 35% han aprobado física. El 80% de los que han suspendido matemáticas, también han suspendido física.

a. Realiza un diagrama de árbol para expresar los datos del problema.

b. Si elegimos un estudiante al azar, probabilidad de que suspenda ambas asignaturas.

b. Si elegimos un estudiante al azar, probabilidad de que solo apruebe matemáticas.

a.



b. $P(NM \cap NF) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$

c. $P(\text{solo apruebe matemáticas}) = P(M \cap NF) = 0{,}3 \cdot 0{,}65 = 0195$