SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

DETERMINANTES.

CÁLCULO DE DETERMINANTES: REGLA DE SARRUS Y DESARROLLO POR ADJUNTOS. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES.

1. CÁLCULO DE UN DETERMINANTE.

a. Regla de Sarrus.

Orden dos: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Orden tres: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - (ceg + bdi + fha); \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

b. Desarrollar un determinante por los adjuntos de una fila o columna.

VER VIDEO https://youtu.be/cBJYjnqDJYg

Menor complementario de un elemento es el determinante que resulta de eliminar la fila y la columna del elemento.

Adjunto de un elemento es $(-1)^{\text{fila + columna}}$ por el menor complementario.

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tomamos un elemento, por e. $\begin{cases} \text{Menor complementario de e: } \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} \\ \text{Adjunto de e: } (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{aplicando Sarrus: } 3+0-2-(0+1+1)=-1 \\ \text{Desarrollando por los adjuntos de la fila 1} \\ 1.(-1)^{1+1}.\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{2} - 1.(-1)^{1+2}.\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{-1} + 2.(-1)^{1+3}.\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{-1} = -1 \\ \text{Desarrollando por los adjuntos de la columna 1} \\ 1.(-1)^{1+1}.\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{2} - 1.(-1)^{2+1}.\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{-3} + 0 = -1 \end{array} \right.$$

Obviamente obtenemos el mismo resultado aplicando Sarrus o desarrollando por los adjuntos de cualquier fila o columna.

c. Determinantes de orden cuatro o superior.

VER VIDEO https://youtu.be/--Lbv5BtCsc

Se desarrollan por adjuntos, haciendo todos los ceros posibles.

1.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{1} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -7 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{2} 1.(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = +82$$

1: $C3 \to C3 - C_1$ y $C4 \to C4 - 2C_1$

2: Desarrollamos por los adjuntos de la fila dos.

2.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{1} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{2} 2.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 52$$

1: $F_2 \to F_2 - F_1$ y $F_4 \to F_4 - 2C_1$

2: Desarrollamos por los adjuntos de la columna tres.

2. PROPIEDADES DE DETERMINANTES.

1. Si una matriz tiene una línea (fila o columna) nula, su determinante es cero.
2. Si en un determinante se cambian entre sí dos líneas paralelas, el determinante cambia de signo.
3. Un determinante con dos líneas paralelas iguales es igual a cero.
4. Si se multiplican los elementos de una línea por un número, el valor del determinante queda multiplicado por ese número.
5. Si los elementos de dos líneas paralelas son proporcionales, el determinante vale cero.
6. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.
7. Si todos los elementos de una línea de un determinante están formados por la suma de dos sumandos, dicho determinante puede descomponerse en la suma de dos

determinantes que tienen los mismos elementos que el determinante dado, excepto los correspondientes a dicha línea que en el primer determinante estará formada por los primeros sumandos y en el segundo determinante por los segundos.

8. Si una línea es combinación lineal de otras líneas paralelas, el determinante vale cero.

9. Si a una línea le sumamos una combinación lineal de otras líneas paralelas, el valor del determinante no varía.

10. El valor de un determinante no varía si se cambian filas por columnas o viceversa, siempre que se mantenga el mismo orden.

11. El determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de cada una de las matrices factores.

12. El determinante de la inversa de una matriz es igual al inverso del determinante de dicha matriz.

13. La suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de los elementos de una línea paralela a ella, es cero.

1. Calcula los valores de X que satisfacen: $\begin{vmatrix} \mathbf{x+a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{a} & \mathbf{x+b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{x+c} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

VER VIDEO https://youtu.be/_kRfel7V7rs

$$\overbrace{\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}}^{C_1+C_2+C_3} = \overbrace{\begin{vmatrix} x+a+b+c & b & c \\ x+a+b+c & x+b & c \\ x+a+b+c & b & x+c \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Sacamos factor común x+a+b+c} \\ \text{de } C_1}} =$$

$$(x+a+b+c)\cdot \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x+b & c \\ 1 & b & x+c \end{vmatrix}}^{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}} = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c).x^2 = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -a-b-c \end{cases}$$

2. Resolver la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} \mathbf{-x} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-x} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-x} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-x} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

VER VIDEO https://youtu.be/eQ5uuBn52IY

$$\overbrace{\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}}^{C_1+C_2+C_3+C_4} = \overbrace{\begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 & 1 \\ 2-x & -x & 1 & 0 \\ 2-x & 1 & -x & 1 \\ 2-x & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Sacamos factor común} \\ 2-x \text{ de } C_1}} = (2-x).\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}}^{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \\ F_4-F_1}} =$$

$$= (2-x).\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -x-1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -x-1 \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Desarrollamos por adjuntos} \\ \text{por los elementos de } C_1}} = (2-x)\overbrace{\begin{vmatrix} -x-1 & 1 & -1 \\ 0 & -x & 0 \\ -1 & 1 & -x-1 \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Desarrollamos por adjuntos} \\ \text{por los elementpos de } F_2}} =$$

$$-x.(2-x).\begin{vmatrix} -x-1 & -1 \\ -1 & -x-1 \end{vmatrix} = -x.(2-x)\ (x^2+2x+1-1) = -x^2.(2-x).(x+2) = 0,$$

de donde $x = 0$, $x = 2$ y $x = -2$.

---

3. Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{a^2} & \mathbf{b^2} & \mathbf{c^2} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$**.**

VER VIDEO https://youtu.be/4ZvyS-BVmYE

Se trata de un determinante de Van der Monde.

$$\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}^{\substack{C_2-C_1 \\ C_3-C_1}} = \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Desarrollando por adjuntos} \\ \text{por los elementos de } F_1}} = \overbrace{\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Sacando factor común} \\ b-a \text{ y } c-a}} =$$

$$= (b-a).(c-a).\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a).(c-a).(c-b) = 0 \text{ por tanto,} \begin{cases} a = b \\ \text{o/y} \\ a = c \\ \text{o/y} \\ b = c \end{cases}$$

---

4. Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} \mathbf{1+x} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1+x} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1+x} \end{vmatrix} = \mathbf{0.}$

VER VIDEO https://youtu.be/XbpbWzkKSVw

$$\overbrace{\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}}^{C_1+C_2+C_3} = \overbrace{\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 1 \\ x+3 & 1+x & 1 \\ x+3 & 1 & 1+x \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Sacamos factor común} \\ x+3 \text{ de } C_1}} = (x+3).\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}}^{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}} =$$

$$(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2.(x+3) = 0. \text{ De donde } \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

---

5. Demostrar, para matrices 2x2, que "el determinante de un producto es el producto de los determinantes". ¿Es cierto que "el determinante de una suma es la suma de los determinantes"?

VER VIDEO https://youtu.be/8yZ5snHHmSQ

Sean las matrices:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $|A| = ad - bc$

$B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ y $|B| = a'd' - b'c'$

$A.B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$

$|A.B| = (aa'+bc')(cb'+dd') - (ab'+bd')(ca'+dc') = \cancel{aa'cb'} + aa'dd' + bc'cb' + \cancel{bc'dd'} - \cancel{ab'ca'} - ab'dc' - bd'ca' - \cancel{bd'dc'} = aa'dd' + bc'cb' - ab'dc' - bd'ca'$

$|A|.|B| = (ad - bc).(a'd' - b'c') = aa'dd' + bc'cb' - ab'dc' - bd'ca'$

Por tanto $|A.B| = |A|.|B|$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} |C| = -2$; $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} |D| = -10$. $|C| + |D| = -12$

$C + D = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} |C + D| = -24$. Vemos pues que $|C| + |D| \neq |C + D|$

---

6. a. Sin desarrollar el determinante, comprobar: $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$

b. Determine el rango del conjunto de vectores (1, - 2, 0, - 3); (- 1, 3, 1, 4) y (2, 1, 5, - 1)

VER VIDEO https://youtu.be/UiqK8iADLTk

---

a.-

$$\overbrace{\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Sacamos x factor} \\ \text{común de } C_1}} = x.\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x+2 \\ 1 & x+3 & x+4 \\ 1 & x+5 & x+6 \end{vmatrix}}^{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}} = x.\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Vale cero.} \\ F_3 = 2F_2}} = 0$$

b.- $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Tomamos un det 2x2 distinto de 0} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rango } \geq 2 \\ \text{Estudiamos ahora los determinantes 3x3} \\ \text{que incluyen al 2x2} \\ \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \right) \end{array} \right\} \text{rango 2}$$

---

7. Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & x \end{pmatrix}$

a) Resolver la ecuación: det(A) = 0

b) ¿En qué casos admite inversa la matriz A.?

VER VIDEO https://youtu.be/CGl66YNManw

$$a)\ \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & x \end{vmatrix}}_{F_3-F_1} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 & x \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & 1 & x & x \end{vmatrix}}_{\text{Sacamos x factor común de } C_4} = x^2.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x^2.\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= x.(x-1+x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

b) Una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero. La matriz A tiene inversa $\forall\ x \neq 0$ y $x \neq \frac{1}{2}$

8. Calcular el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{-x} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{x} & \mathbf{-x} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{x} & \mathbf{-x} \\ \mathbf{-x} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{x} \end{vmatrix}$.

VER VIDEO https://youtu.be/M7ehynk14Xw

$$\underbrace{\begin{vmatrix} x & -x & 1 & 2 \\ 2 & x & -x & 1 \\ 1 & 2 & x & -x \\ -x & 1 & 2 & x \end{vmatrix}}_{c_1+c_2+c_3+c_4} = \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -x & 1 & 2 \\ 3 & x & -x & 1 \\ 3 & 2 & x & -x \\ 3 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}}_{\substack{f_2-f_1 \\ f_3-f_1 \\ f_4-f_1}} = \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -x & 1 & 2 \\ 0 & 2x & -x-1 & -1 \\ 0 & 2+x & x-1 & -x-2 \\ 0 & 1+x & 1 & x-2 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{desarrollamos por adjuntos} \\ \text{por los elementos} \\ \text{de la primera columna.}}} =$$

$$3.\begin{vmatrix} 2x & -x-1 & -1 \\ 2+x & x-1 & -x-2 \\ 1+x & 1 & x-2 \end{vmatrix} = 12x^3 + 6x^2 + 24x - 15$$

9. Sabiendo que $\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \\ \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{i} \end{vmatrix} = -3$**; calcular.**

a. $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ d+a & e+b & f+c \\ g-2d & h-2e & i-2f \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 2a & g+d & -d \\ 2b & h+e & -e \\ 2c & i+f & -f \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} a+b-2c & b+c-2a & \frac{1}{d.g} \\ d+e-2f & e+f-2d & \frac{1}{a.g} \\ g+h-2i & h+i-2g & \frac{1}{a.d} \end{vmatrix}$

a . VER VIDEO https://youtu.be/a1GYQyArKRg

$$\overbrace{\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ d+a & e+b & f+c \\ g-2d & h-2e & i-2f \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Sacamos factor común}-1 \\ \text{de la } F_1}} = -\overbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+a & e+b & f+c \\ g-2d & h-2e & i-2f \end{vmatrix}}^{F_2-F_1} =$$

$$= -\overbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g-2d & h-2e & i-2f \end{vmatrix}}^{F_3+2F_1} = -\overbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}^{-3} = -(-3) = 3$$

b. VER VIDEO https://youtu.be/qvX1wUiISKw

$$\overbrace{\begin{vmatrix} 2a & g+d & -d \\ 2b & h+e & -e \\ 2c & i+f & -f \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Sacamos factor común2} \\ \text{de la } C_1 \text{y } -1 \text{ de } C_3}} = -2.\overbrace{\begin{vmatrix} a & g+d & d \\ b & h+e & e \\ c & i+f & f \end{vmatrix}}^{C_2-C_3} = -2.\overbrace{\begin{vmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Hacer} \\ \text{traspuesta}}} = 2.\overbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}^{-3} = 2.(-3)$$
$$= -6$$

c. $\begin{vmatrix} a+b-2c & b+c-2a & \frac{1}{d.g} \\ d+e-2f & e+f-2d & \frac{1}{a.g} \\ g+h-2i & h+i-2g & \frac{1}{a.d} \end{vmatrix}$

$$\overbrace{\begin{vmatrix} a+b-2c & b+c-2a & \frac{1}{d.g} \\ d+e-2f & e+f-2d & \frac{1}{a.g} \\ g+h-2i & h+i-2g & \frac{1}{a.d} \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Sacamos factor común } \frac{1}{a.d.g} \\ \text{de } C_3}} = \frac{1}{a.d.g}.\overbrace{\begin{vmatrix} a+b-2c & b+c-2a & a \\ d+e-2f & e+f-2d & d \\ g+h-2i & h+i-2g & g \end{vmatrix}}^{C_1-C_3} =$$

$$= \frac{1}{a.d.g}.\overbrace{\begin{vmatrix} b-2c & b+c & a \\ e-2f & e+f & d \\ h-2i & h+i & g \end{vmatrix}}^{C_2-C_1} = \frac{1}{a.d.g}.\overbrace{\begin{vmatrix} b-2c & 3c & a \\ e-2f & 3f & d \\ h-2i & 3i & g \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Sacamos factor} \\ \text{común 3 de } C_2}} = \frac{3}{a.d.g}.\overbrace{\begin{vmatrix} b-2c & c & a \\ e-2f & f & d \\ h-2i & i & g \end{vmatrix}}^{C_1+2C_2} =$$

$$\frac{3}{a.d.g}.\overbrace{\begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Permutar} \\ C_2 \text{ y } C_3}} = \frac{-3}{a.d.g}.\overbrace{\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Permutar} \\ C_1 \text{ y } C_2}} = \frac{3}{a.d.g}.\overbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}^{-3} = \frac{-9}{a.d.g}$$

10. Hallar en función de a, b y c el determinante: $\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{a} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a+b} & \mathbf{a} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a} & \mathbf{a+c} & \mathbf{a} \end{vmatrix}$

VER VIDEO https://youtu.be/HhpWH4YXGSw

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & -b & -b \\ a & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -b & -b \\ c & 0 \end{vmatrix} =$$

$= a{\cdot}b{\cdot}c$

11. Calcula $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$ sin usar la regla de Sarrus y dando el resultado factorizado.

VER VIDEO https://youtu.be/s7UKGvkIaYM

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ b & a^2 & b^2 \\ b & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a^2-b^2 & 0 \\ b & 0 & a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= a^2(a^2-b^2)^2 \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix}}^{\substack{Matriz \\ triangular \\ determ.=1}} = a^2(a^2-b^2)^2$$

12. Si |A| = 3, y A es 3x3, calcula: $|A^3|$, |3A| y $|A^{-1}|$

VER VIDEO https://youtu.be/XTlbcW2Ur2s

$|A^3| = |A.A.A| = |A|.|A|.|A| = 3.3.3 = 27$

$$|3A| = |3I|.|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.|A| = 27.3 = 81$$

$$|A^{-1}|;\ A.A^{-1} = I \rightarrow |A.A^{-1}| = |I| \rightarrow\ |A|.|A^{-1}| =\ 1 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3}$$

13. Calcula el determinante con el resultado factorizado. $\begin{vmatrix} 1 & b & a^2 \\ b & a^2 & a^3 \\ a^2 & a^3 & a^4 \end{vmatrix}$.

VER VIDEO https://youtu.be/_507IJYdqXw

$$\begin{vmatrix} 1 & b & a^2 \\ b & a^2 & a^3 \\ a^2 & a^3 & a^4 \end{vmatrix} = a^4 \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a^2 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^4 \begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ b & a^2 & a-b \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = a^4(a-b)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & a \end{vmatrix} =$$

$-a^4(a-b)^2$

14. Calcula el determinante sin aplicar Sarrus. $\begin{vmatrix} 0 & \log 2 & \log 4 \\ \log 2 & \log 4 & \log 8 \\ \log 4 & \log 8 & \log 16 \end{vmatrix}$.

VER VIDEO https://youtu.be/omumjKnCfA4

$$\begin{vmatrix} 0 & \log 2 & \log 4 \\ \log 2 & \log 4 & \log 8 \\ \log 4 & \log 8 & \log 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \log 2 & \log 2^2 \\ \log 2 & \log 2^2 & \log 2^3 \\ \log 2^2 & \log 2^3 & \log 2^4 \end{vmatrix} = \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & \log 2 & 2\log 2 \\ \log 2 & 2\log 2 & 3\log 2 \\ 2\log 2 & 3\log 2 & 4\log 2 \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Sacamos factor común log2} \\ \text{de las tres columnas.}}} =$$

$$(\log 2)^3 . \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}^{F_3 - 2F_2} = (\log 2)^3 . \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Vale cero} \\ F_1 = -F_3}} = 0$$

15. Resuelve la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{x} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{x} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{x} \end{vmatrix} = \mathbf{80x - 96}$

VER VIDEO https://youtu.be/dzFAjSZN6Q0

$$x^4 - 20x^2 + 80x - 96 = 80x - 96 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{20} \\ x = -\sqrt{20} \end{cases}$$

16. Se tiene una matriz M cuadrada de orden 3 cuyas columnas son respectivamente C1, C2 y C3 y cuyo determinante vale 2. Se considera la matriz A cuyas columnas son – C2, C3 + C2, 3C1. Calcúlese razonadamente el determinante de A^{-1} en el caso de que exista esa matriz.

VER VIDEO https://youtu.be/NBCOolJTGHM

$$|C_1 \quad C_2 \quad C_3| = 3 \to \overbrace{|-C_2 \quad C_3 + C_2 \quad 3C_1|}^{\substack{\text{Sacamos} -1 \text{ de } C_1 \\ \text{Sacamos 3 de } C_3}} = -3 \cdot \overbrace{|C_2 \quad C_3 + C_2 \quad C_1|}^{C_2 - C_1} =$$

$$-3 \cdot \overbrace{|C_2 \quad C_3 \quad C_1|}^{\text{Permutar } C_1 y C_3} = 3 \cdot \overbrace{|C_1 \quad C_3 \quad C_2|}^{\text{Permutar } C_2 \text{ y } C_3} = -3 \cdot \overbrace{|C_1 \quad C_2 \quad C_3|}^{2} = -6$$