SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

TRIGONOMETRÍA.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS, RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES, RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS, RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS, FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, EL RADIAN

1. RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES.

Ecuación fundamental

$$\mathbf{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \mathrm{sen}^2\alpha \quad \Big| \quad \mathrm{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \Big| \quad 1 + \mathrm{tag}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \Big| \quad 1 + \mathrm{cotag}^2\alpha = \frac{1}{\mathrm{sen}^2\alpha}$$

1. Demostrar las relaciones trigonométricas siguientes.

$$\mathbf{a.}\ \mathbf{1 + tag^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}}$$

$$\mathbf{b.}\ \mathbf{tag\alpha - sen\alpha = \frac{sen\alpha \cdot (1 - cos\alpha)}{cos\alpha}}$$

a.

$$1 + \mathrm{tag}^2\alpha = 1 + \frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

b.

$$\mathrm{tag}\alpha - \mathrm{sen}\alpha = \frac{\mathrm{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \mathrm{sen}\alpha = \frac{\mathrm{sen}\alpha - \mathrm{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\mathrm{sen}\alpha \cdot (1 - \cos\alpha)}{\cos\alpha}$$

2. Demostrar las relaciones trigonométricas siguientes.

$$\mathbf{a.}\ \mathbf{sen^4\alpha - cos^4\alpha = sen^2\alpha - cos^2\alpha}$$

$$\mathbf{b.}\ \mathbf{1 + \frac{1}{tag^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha}}$$

a.

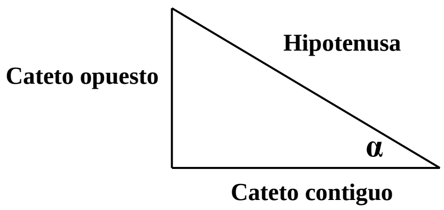
$$\mathrm{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha=(\mathrm{sen}^2\alpha)^2-(\cos^2\alpha)^2=\overbrace{(\mathrm{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)}^{1}\cdot(\mathrm{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha)=$$
$$=\mathrm{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha$$

b.

$$1+\frac{1}{\mathrm{tag}^2\alpha}=1+\frac{\cos^2\alpha}{\mathrm{sen}^2\alpha}=\frac{\mathrm{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\mathrm{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\mathrm{sen}^2\alpha}$$

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

$$\mathbf{sen\alpha=\frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}}$$
$$\mathbf{cos\alpha=\frac{Cateto\ contiguo}{Hipotenusa}}$$
$$\mathbf{tag\alpha=\frac{sen\alpha}{cos\alpha}=\frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ contiguo}}$$



3.

a. Si $\mathbf{sen\alpha=\frac{1}{2}}$ **y** $\alpha\in$ **II; hallar cosα y tagα.**

b. Si $\mathbf{cos\alpha=\frac{-\sqrt{2}}{2}}$ **y** $\alpha\in$ **III; hallar senα y tagα.**

c. Si $\mathbf{tag\alpha=\sqrt{3}}$ **y** $\alpha\in$ **I; hallar cosα y senα.**

VER VÍDEO https://youtu.be/LXx7ftcw4jM

4. Calcular las razones trigonométricas de x sabiendo que senx = ½. x ∈ II.

$\mathrm{sen}^2x+\cos^2x=1\rightarrow 1/4+\cos^2x=1\rightarrow\cos^2x=3/4\rightarrow\cos x=-\sqrt{\frac{3}{4}}$; negativo pues en el segundo cuadrante el cos es negativo.

$$\tan x=\frac{\mathrm{sen}x}{\cos x}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

5. Calcular las razones trigonométricas de x sabiendo que cosx = $\frac{\sqrt{3}}{2}$**. x ∈ IV.**

$\mathrm{sen}^2x+\cos^2x=1\rightarrow\mathrm{sen}^2x+3/4=1\rightarrow\mathrm{sen}^2x=1/4\rightarrow\mathrm{sen}x=-1/2$; negativo pues en el cuarto cuadrante el sen es negativo.

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

6. Calcular las razones trigonométricas de x sabiendo que tanx = 1. x ∈ III.

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \to 1 + 1^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \to \cos^2\alpha = \frac{1}{2} \to \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \to \operatorname{sen} x = \cos x \cdot \tan x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

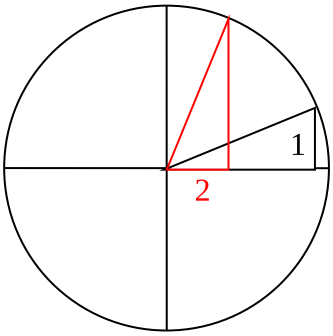
7. Sabiendo que sen 15º= 0,26, calcular:

- **a. cos 75º.**
- **b. sen 105º.**
- **c. tan 165º.**
- **d. sen 195º**
- **e. cos 255º**
- **f. tan 285º**
- **g. sen 345º**

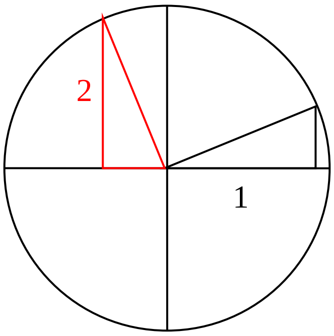
$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \to 0{,}26^2 + \cos^2 x = 1 \to \cos^2 x = 0{,}93 \to \cos x = 0{,}97$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{0{,}26}{0{,}97} = 0{,}27$$

a. $\underbrace{\cos 75°}_{2} = \underbrace{\operatorname{sen} 15°}_{1} = 0{,}26$

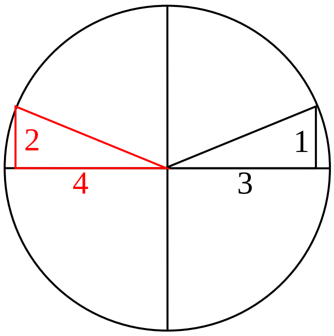


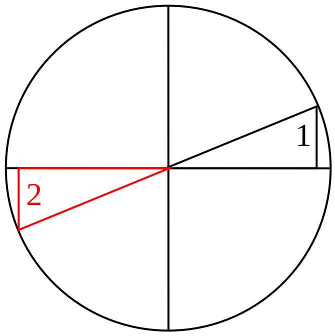
b. $\underbrace{\operatorname{sen} 105°}_{2} = \underbrace{\cos 15°}_{1} = 0{,}97$



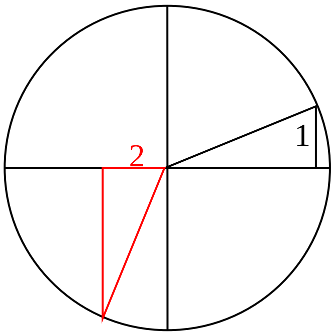
c. $\tan 165° = \dfrac{\overbrace{\operatorname{sen} 165°}^{2}}{\underbrace{\cos 165°}_{4}} = \dfrac{\overbrace{\operatorname{sen} 15°}^{1}}{\underbrace{-\cos 15°}_{3}} =$
$= -0{,}27$

d. $\underbrace{\operatorname{sen} 195°}_{2} = \underbrace{-\operatorname{sen} 15°}_{1} = -0{,}26$

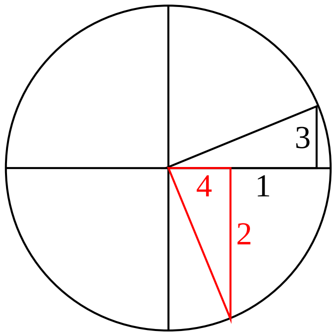




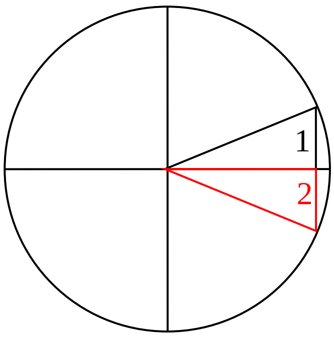
e. $\underbrace{\cos 255°}_{2} = \underbrace{-\text{sen}15°}_{1} = -0,26$



f. $\tan 285° = \dfrac{\overbrace{\text{sen}285°}^{2}}{\underbrace{\cos 285°}_{4}} = \dfrac{\overbrace{-\cos 15}^{1}}{\underbrace{\text{sen}15}_{3}} = -3,7$



g. $\underbrace{\text{sen}345°}_{2} = \underbrace{-\text{sen}15°}_{1} = -0,26$



8. Sabiendo que senx = 0'8 y que x está en el II cuadrante, calcular:

a. cosx

b. tanx

c. sen(90 + x)

d. cos(180 – x)

e. tan(270 + x)

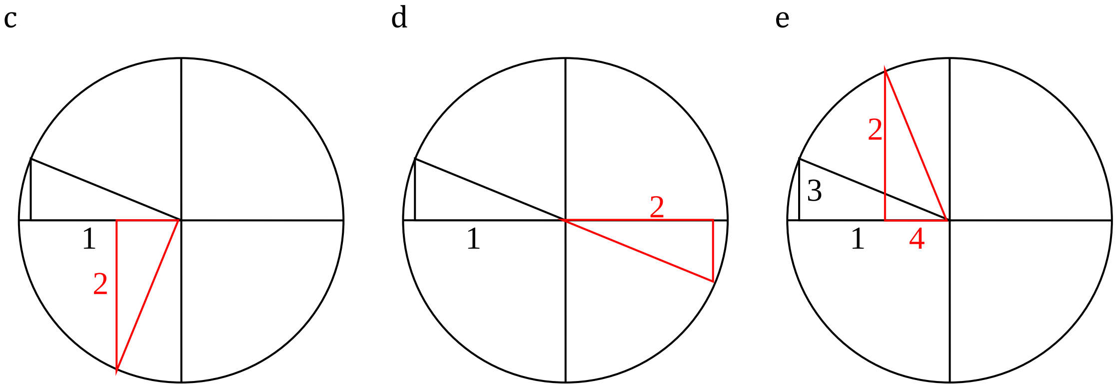
a. $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1 \rightarrow 0,8^2 + \cos^2x = 1 \rightarrow \cos^2x = 0,36 \rightarrow \cos x = -0,6$; negativo pues en el segundo cuadrante el cos es negativo.

b. $\tan x = \dfrac{\text{sen}x}{\cos x} = \dfrac{0,8}{-0,6} = \dfrac{-4}{3}$

$$\text{c. } \overbrace{\text{sen}(90+x)}^{2} = \overbrace{\cos x}^{1} = -0{,}6$$

$$\text{d. } \overbrace{\cos(180-x)}^{2} = -\overbrace{\cos x}^{1} = 0{,}6$$

$$\text{e. } \tan(270+x) = \frac{\overbrace{\text{sen}(270+x)}^{2}}{\underbrace{\cos(270+x)}_{4}} = \frac{-\overbrace{\cos x}^{1}}{-\underbrace{\text{sen}x}_{3}} = \frac{-3}{4}$$



9. Calcular las razones trigonométricas siguientes.

a. sen 750º
b. cos 3285º
c. tag - 840

a. sen 750° = sen 30° = 0,5

b. cos 3285° = cos 45° = $\sqrt{2}/_2$

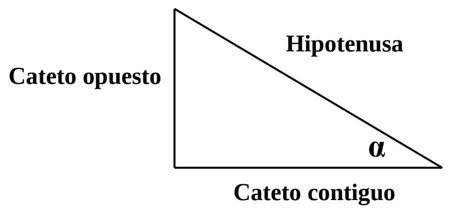
c. tag (- 840°) = tag (- 120°) = - tag 120° = $-\frac{sen120°}{cos120°} = -\frac{sen\ 60°}{-cos60°} = \sqrt{3}$

4. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

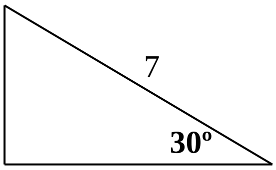
$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

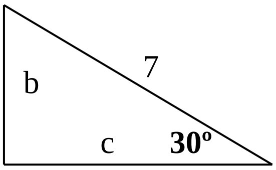
$$\cos\alpha = \frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{tag}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}$$



10. Hallar los catetos del siguiente triángulo.

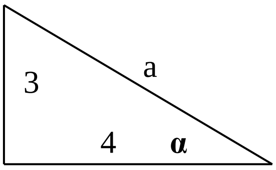




$\text{sen}30 = \frac{b}{7} \rightarrow b = 7.\text{sen}30 = \mathbf{3'5}$

$\cos 30 = \frac{c}{7} \rightarrow c = 7.\cos 30 = \mathbf{6'06}$

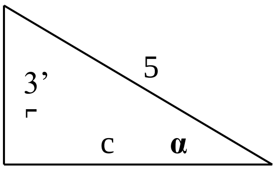
11. Resolver un triángulo rectángulo de cateto 3 y 4 cm.



$\tan\alpha = \frac{3}{4} \rightarrow \alpha = \text{shift}\tan\frac{3}{4} = \mathbf{36'87º}$

$\text{Pitágoras: } a = \sqrt{b^2 + c^2} = \mathbf{5\ cm.}$

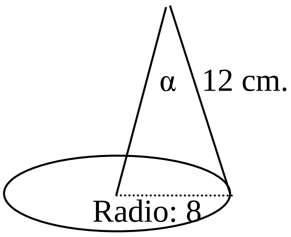
12. Una escalera de 5 m. se apoya en la pared a 3'5 m. de altura. ¿A qué distancia de la pared se apoya? ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo?

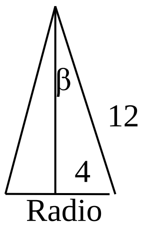


$\text{sen}\alpha = \frac{3'5}{5} \rightarrow \alpha = \text{shift sen}\frac{3'5}{5} = \mathbf{44'43º}$

$\text{Pitágoras: } c = \sqrt{a^2 - b^2} = \mathbf{3'57\ cm.}$

13. Las patas de un compás miden 12 cm. ¿Qué ángulo forman si dibujamos una circunferencia de 16 cm. de diámetro?

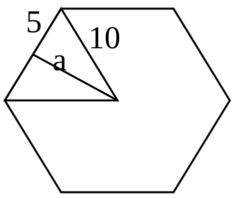




$\text{sen}\beta = \frac{4}{12} \rightarrow \beta = 19'47º$

$\alpha = 2\beta = \mathbf{38'94º}$

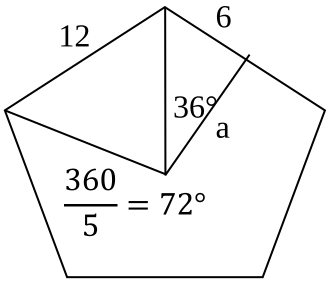
14. Calcular el área de un hexágono regular de 10 cm. de lado.



$\text{Pitágoras: } a = \sqrt{10^2 - 5^2} = \mathbf{8'66\ cm.}$

$\text{área} = \frac{\text{perimetro.apotema}}{2} = \frac{6.10.8'66}{2} = \mathbf{259'8cm^2}.$

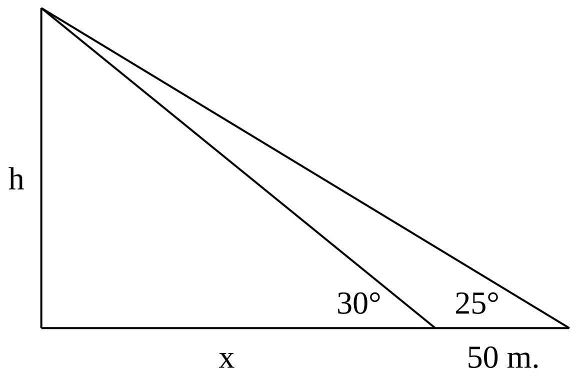
15. Calcular el área de un pentágono regular de 12 cm. de lado.



$$\tan 36 = \frac{6}{a} \rightarrow a = \frac{6}{\tan 36} = 8'26\text{cm}.$$

$$\text{área} = \frac{\text{perimetro. apotema}}{2} = \frac{5.12.8'26}{2} = \mathbf{247'8cm^2}.$$

16. Vemos un poste bajo un ángulo de 30°. Si nos alejamos 50 m. la veremos bajo un ángulo de 25°. Calcular la altura del poste.



$$\begin{cases} \tan 30 = \frac{h}{x} \rightarrow h = x.\tan 30 \\ \tan 25 = \frac{h}{50+x} \rightarrow h = (50+x).\tan 25 \end{cases}$$

x.tan30 = (50 + x).tan25

x.tan30 = 50.tan25 + x.tan25

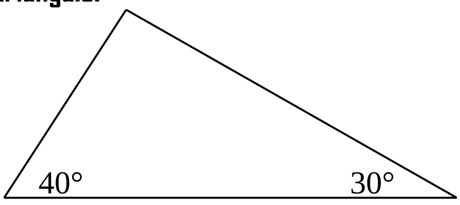
xtan30 – x.tan25 = 50.tan25

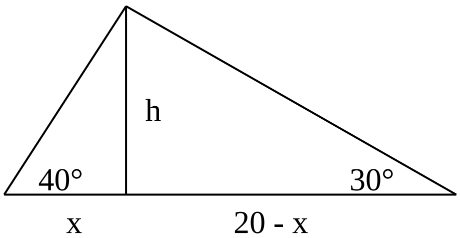
x.(tan30 – tan25) = 50.tan25

$$x = \frac{50.\tan 25}{\tan 30 - \tan 25} = \mathbf{210\ m}.$$

5. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

17. Hallar el área del siguiente triángulo.





$$\begin{cases} \tan 30 = \frac{h}{20-x} \rightarrow h = (20-x).\tan 30 \\ \tan 40 = \frac{h}{x} \rightarrow h = x.\tan 40 \end{cases}$$

(20 - x).tan30 = x.tan40

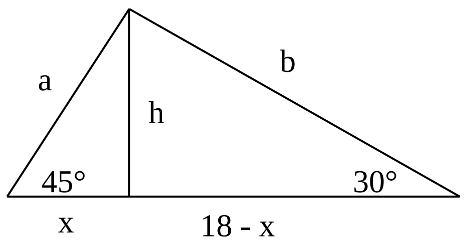
20.tan30 - x.tan30 = x.tan40

20.tan30 = x.tan40 + x.tan30

20.tan30= x.(tan40 + tan30)

$$x = \frac{20.\tan 30}{\tan 40 + \tan 30} = 8'15 \text{ cm.}$$
h = x.tan40 = 6'84 cm.
área = **68'4 cm²**.

18. Un poste está anclado al suelo mediante dos cables, la base del poste y los anclajes de los cables están alineados. Si uno de los cables forma con el suelo un ángulo de 35º y el otro forma con el suelo un ángulo de 45º calcular la altura del poste y la longitud de los cables sabiendo que los puntos de anclaje distan 18 m.



$$\begin{cases} \tan 30 = \dfrac{h}{18-x} \rightarrow h = (18-x).\tan 30 \\ \tan 45 = \dfrac{h}{x} \rightarrow h = x.\tan 45 \end{cases}$$

(18 - x).tan30 = x.tan45
18.tan30 - x.tan30 = x.tan45
18.tan30 = x.tan45 + x.tan30
18.tan30= x.(tan45 + tan30)

$$x = \frac{18.\tan 30}{\tan 45 + \tan 30} = 6{,}59 \text{ m.}$$

h = x.tan45 = 6,59 m.

$$\text{sen } 45° = \frac{h}{a} \rightarrow a = 9{,}32 \text{ m.}$$
$$\text{sen } 30° = \frac{h}{b} \rightarrow b = 13{,}18 \text{ m.}$$

6. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS. EL RADIAN.

Un radian es la medida de un ángulo cuyo arco es igual al radio.
π radian = 180°

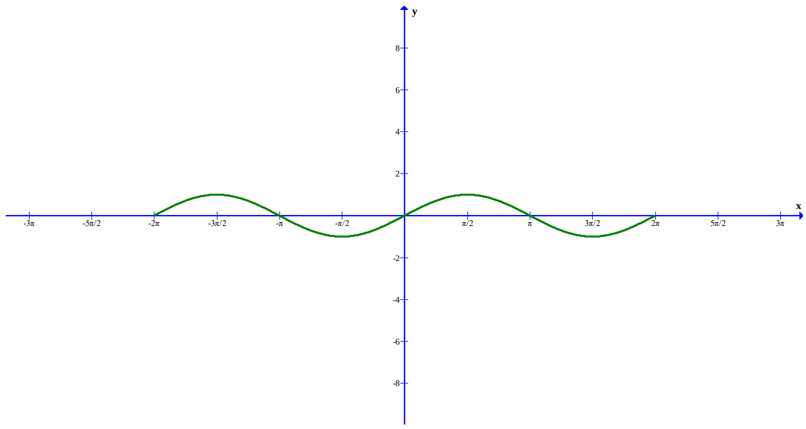
19. Realiza las conversiones siguientes.
a. 30° a radianes.
b. 3π/2 radianes a grados.

a.
$$30° \cdot \frac{\pi \text{ rad.}}{180°} = \frac{\pi}{6}\text{rad.}$$
b.
$$\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad.}} = 270°$$

20. Representar la función y = sen x

Para representar una función trigonométrica haremos la tabla siguiente con la calculadora en radianes. Toma siempre los mismos valores de x

x	- 2π	- 3π/2	-π	- π/2	0	π/2	π	3π/2	2π
y = sen x	0	1	0	- 1	0	1	0	- 1	0



21. Representar la función y = con 2x

Para representar una función trigonométrica haremos la tabla siguiente con la calculadora en radianes. Toma siempre los mismos valores de x

x	- 2π	- 3π/2	-π	- π/2	0	π/2	π	3π/2	2π
y = sen x	1	- 1	1	- 1	1	- 1	1	- 1	1