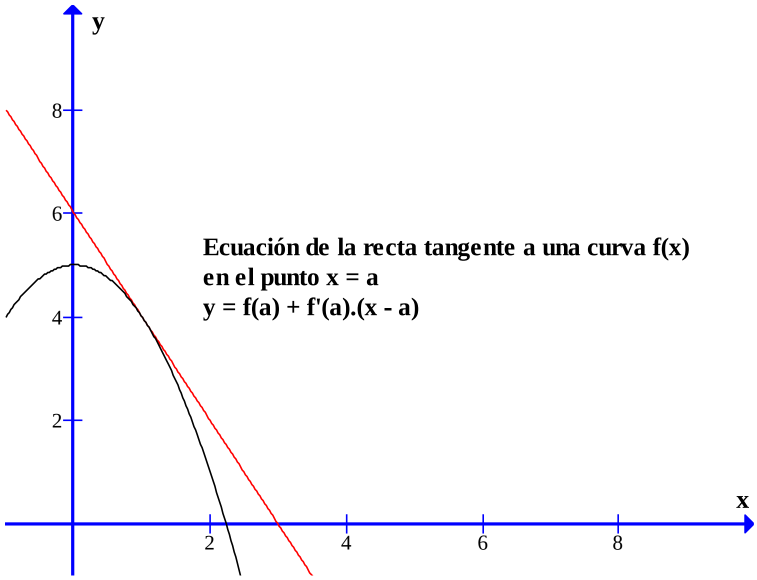
SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

RECTA TANGENTE.



Hay 5 modelos básicos de ejercicios. Primero mira al menos 1 de cada modelo.

1. Me dan la función en forma explícita y la x del punto de tangencia.

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 2x + 1$ en el punto $x = 3$

VER VIDEO https://youtu.be/1CtrNCjwG9I

$y = f(a) + f'(a).(x - a)$

$$y = f(3) + f'(3).(x - 3)\begin{cases} f(3) = 3^2 - 2.3 + 1 = 4 \\ f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f'(3) = 2.3 - 2 = 4 \end{cases} \rightarrow y = 4 + 4.(x - 3)$$

$y = 4x - 8$

2.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x.\text{senx}$ en el punto $x = \pi$

VER VIDEO https://youtu.be/Rkc07449WsI

y = f(π) + f'(π).(x – π)$\begin{cases} f(\pi) = \pi.\,\text{sen}\,\pi = 0 \\ f'(x) = \text{sen}\,x + x.\cos x \rightarrow f'(\pi) = \text{sen}\,\pi + \pi.\cos\pi = -\pi \end{cases}$ →
→ y = 0 – π (x – π) → y = -π.x + π^2

2. Me dan la función en forma implícita y la x del punto de tangencia.

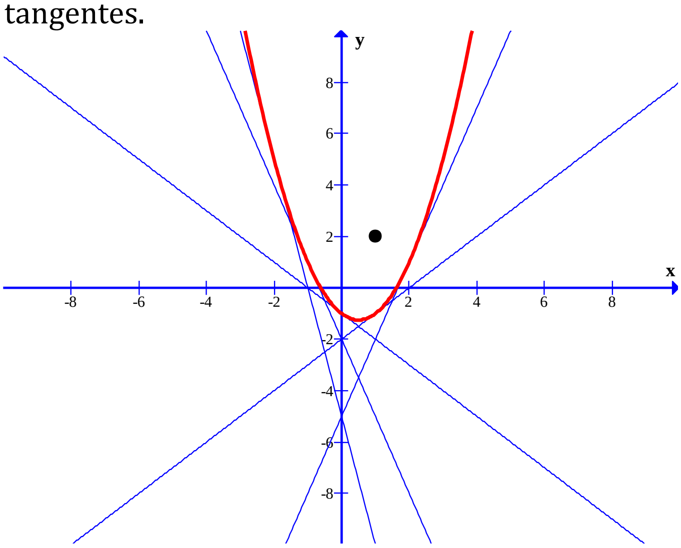
3. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva lny + xy = 1 en el punto (1, 1)
VER VIDEO https://youtu.be/vtcN_h4FdKk

Aplicando la derivación implícita $\frac{1}{y}\cdot y' + 1\cdot y + x\cdot y' = 0 \overset{En\ (1,1)}{\Rightarrow} y' = \frac{-1}{2}$
Ecuación recta tangente: y = f(1) + f'(1)·(x – 1); y = 1 + $\frac{-1}{2}$·(x – 1);
$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2}$$

3. Me dan la función y un punto que puede pertenecer o no a la función.

4. Dada la función y = x^2 – x – 1 . Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha función en el punto (1, 2).
VER VIDEO https://youtu.be/BUC44Vo08qk

El punto (1, 2) no pertenece a la curva (basta sustituir).
La ecuación de una recta que pasa por (1, 2) es y = 2 + m(x – 1). Despejando el valor de m, $m = \frac{y-2}{x-1}$
Hacemos f '(x) = m → $2x - 1 = \frac{y-2}{x-1}$ → sustituimos y: $2x - 1 = \frac{x^2 - x - 3}{x-1}$.
Si operamos vemos que la ecuación no tiene solución real. Por tanto, por el punto (1, 2) no pasa ninguna tangente a la curva. Observa la gráfica en la que hay dibujadas varias tangentes.



4. Me dan la función y no me dan ni la x del punto de tangencia ni un punto, sino que me dicen de que punto se trata.

5. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva y = x.lnx en el punto de corte con el eje X.
VER VIDEO https://youtu.be/9H8SQAOW0fw

Corte con el eje X (y = 0): x.lnx = 0 $\begin{cases} x = 0, \text{no pertenece al dominio.} \\ \ln x = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$

En x = 1 ; y = f(1) + f'(1).(x – 1) $\begin{cases} f(1) = 1.\ln 1 = 0 \\ f'(x) = \ln x + 1 \rightarrow f'(1) = \ln 1 + 1 = 1 \end{cases} \rightarrow y = x - 1$

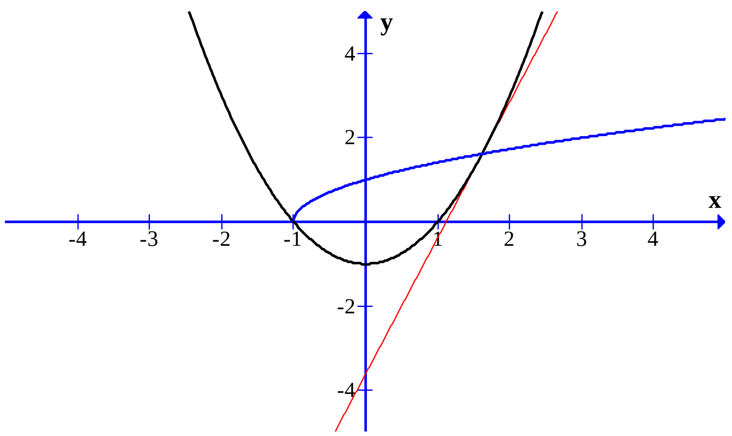
6. Se consideran las curvas y = x^2 – 1 i y = $\sqrt{x+1}$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la primera curva en el punto de corte con la segunda, de abcisa positiva.
VER VIDEO https://youtu.be/j_35iN2sv7U

Punto de corte $x^2 - 1 = \sqrt{x+1} \rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = x + 1 \rightarrow x^4 - 2x^2 - x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x.(x^3 - 2x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 2x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{cases} \rightarrow \text{Tomamos } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Ecuación recta tangente: } y = f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + f'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \rightarrow$$

$$y = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1 + (1+\sqrt{5}).\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$



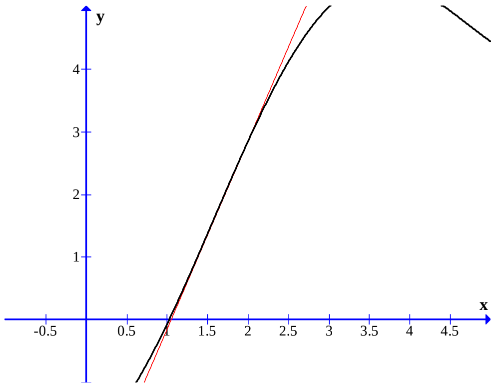
7. Demostrar que la curva f(x) = x – 2cos x tiene un punto de inflexión en el interior del intervalo [0 ,π] y hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en este punto. Haz un dibujo en un entorno de éste.
VER VIDEO https://youtu.be/octLRhKbrlI

$f(x) = x - 2.\cos x \rightarrow f'(x) = 1 + 2.\operatorname{sen} x \rightarrow f''(x) = 2.\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}.$

$f'''(x) = -2.\operatorname{sen} x \rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \rightarrow$ en $x = \frac{\pi}{2}$ la función tiene un punto de inflexión. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

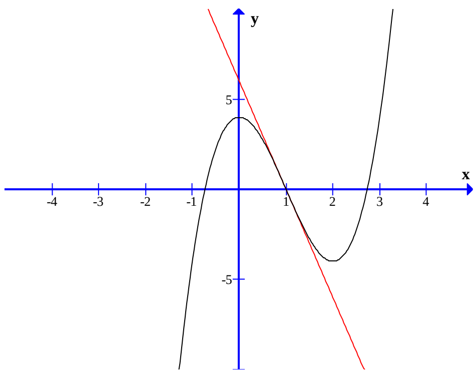
Ecuación de la recta tangente en $x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right).\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$

$\rightarrow y = 3x - \pi$



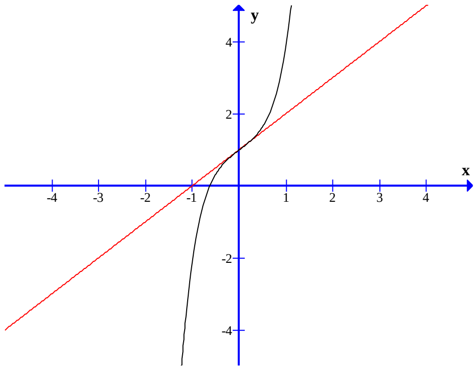
8. Se considera la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$ calcula la ecuación de la recta tangente a la curva representativa de esta función en su punto de inflexión. Haz también una gráfica aproximada de la función en un entorno de este.

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4 \rightarrow f'(x) = 6x^2 – 12x \rightarrow f''(x) = 12x – 12 = 0$ $x = 1$
Tiene un punto de inflexión en $x = 1$.
La recta tangente es $y = f(1) + f'(1).(x – 1) \rightarrow y = – 6x + 6$



9. Demostrar que la función $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ tiene un único punto de inflexión. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva representativa de esta función en el punto P.

$f(x) = x^5 + x^3 + x + 1 \rightarrow f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 \rightarrow f''(x) = 20x^3 + 6x = 0 \rightarrow x = 0$
Punto de inflexión (0, 1).
Recta tangente es $y = f(0) + f'(0).(x – 0) \rightarrow y = x + 1$



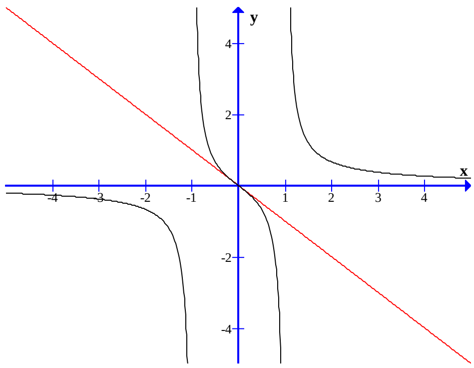
10. Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto de inflexión de la función f(x) = $\frac{\mathbf{Lnx}}{\mathbf{x}}$. Haz un gráfico de la función en un entorno de este punto, donde aparezca también dibujada la recta tangente.

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}\to f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}\to f''(x)=\frac{\frac{-1}{x}x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}$$
$$=\frac{-3+2\ln x}{x^3}=0\to x=e^{\frac{3}{2}}$$

Recta tangente es $y=\underbrace{f(e^{\frac{3}{2}})}_{0'33}+\underbrace{f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right)}_{-0'025}.\left(x-\underbrace{e^{\frac{3}{2}}}_{4'48}\right)\to y=-0'025x+0'446$

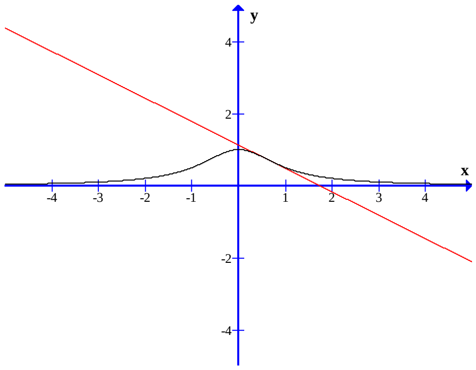
11. Halla el punto de inflexión de la curva de ecuación $y=\frac{x}{x^2-1}$ y calcula la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

Punto de inflexión (0, 0). Recta tangente y = - x.



12. Determina el punto de inflexión de abcisa positiva de la curva de ecuación $y=\frac{1}{1+x^2}$. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva en ese punto. ¿Cuál es la posición de la curva respecto a la tangente?

Punto de inflexión $\left(\sqrt{\frac{1}{3}},\frac{3}{4}\right)$. Recta tangente y = $\frac{-9}{8}\sqrt{\frac{1}{3}}x+\frac{9}{8}$



13. Demostrar que la curva de ecuación $y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ no tiene puntos de inflexión. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (x_0, y_0) donde x_0 es el valor de x que hace mínima y''.

$y' = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$; $y'' = 12x^2 - 6x + 2 = 0$ No tiene solución real. No tiene punto de inflexión.

Para que y'' sea minima, f''' debe ser cero $f'''(x) = 24x - 6 = 0 \to x = ¼$.

El punto que hace mínima y''es $\left(\frac{1}{4}, \frac{205}{256}\right)$ y la recta tangente $y = \frac{-5}{8}x + \frac{245}{256}$

5. Me dan la función y no me hablan del punto de tangencia ni de ningún punto, pero sí me dan datos para conocer la pendiente de la recta tangente.

14. Hallar los puntos de la curva $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ en los cuáles la pendiente de la recta tangente es uno.

VER VIDEO https://youtu.be/-X8mvvk7YuI

La pendiente de la tangente es la derivada en el punto de tangencia, f '(x) = m, de donde, f '(1) = 1

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \to y = \pm\sqrt{2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)} = \pm\sqrt{\frac{4 - x^2}{2}}$$

$$y' = \pm\frac{-x}{2.\sqrt{\frac{4 - x^2}{2}}} = 1, \text{si } f'(1) = 0 \to \pm\frac{-x}{2.\sqrt{\frac{4 - x^2}{2}}} = 1 \to \mp x = 2.\sqrt{\frac{4 - x^2}{2}} \to$$

$$\to x^2 = 4\frac{4 - x^2}{2} \to x^2 = 8 - 2x^2 \to\to 3x^2 = 8 \to x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}} = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Los puntos son $\begin{cases} \left(2\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \\ \left(-2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \end{cases}$

15. Considerar la función, determinar el valor de k para el cual la pendiente de la recta tangente a la función en x = 0 toma el valor 3.

$$\mathbf{f(x) = \frac{e^{kx}}{1 + x^2}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/lxXHYrn1qpU

$$m = f'(0) = 3 \rightarrow f'(x) = \frac{ke^{kx}(1+x^2) - 2xe^{kx}}{(1+x^2)^2} = \frac{e^{kx}(k - 2x + kx^2)}{(1+x^2)^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow f'(0) = k = 3.$$