SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

SELECTIVIDAD MATEMÁTICAS APLICADAS U.I.B. SEP. 2016.

OPCIÓN A.

1. a. Dadas las matrices: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{4}\end{pmatrix}$ y $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{5}\\ \mathbf{-3} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$ resolver la ecuación matricial $AX + B^t = B$.

b. Dar un ejemplo de las matrices siguientes.

b.1. Matriz fila con tres columnas.

b.2. Matriz columna con tres filas.

b.3. Matriz de dimensión 3x2.

b.4. Matriz simétrica de dimensión 3x3.

VER VÍDEO https://youtu.be/otfXAeRz7_o

a. $AX+B^t=B \to AX=B-B^t \to X=A^{-1}\cdot(B-B^t)=$

$$=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}^{-1}\cdot\left(\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}^{t}\right)=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 8\\ -8 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -2\end{pmatrix}$$

b. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\ y\ \begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}$

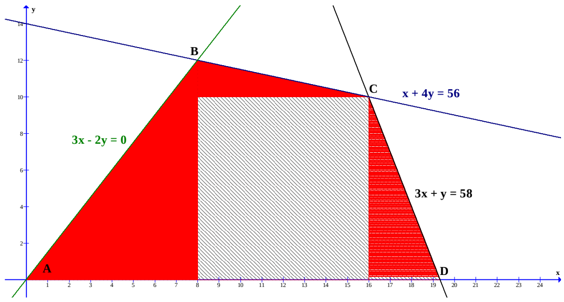
2. Para fabricar dos tipos de cables A y B que se venderá a 150 y 100 euros el hectómetro, respectivamente, se utilizan 18 kilos de plástico y tres kilos de cobre por cada hectómetro del tipo A y 6 kilos de plástico y 12 kilos de cobre por cada hectómetro del tipo B. Dos veces el cable fabricado del tipo B no puede ser mayor que tres veces el cable fabricado del tipo A. Además, solamente tenemos 348 kilos de plástico y 168 kilos de cobre. Determinar la longitud en kilómetros de cada tipo de cable, para que la cantidad de dinero obtenida en la venta sea máxima. ¿Cuál es esta cantidad máxima?

VER VÍDEO https://youtu.be/qwnfQLSJCxU

	PLASTICO	COBRE	COSTE
TIPO A	18	3	150
TIPO B	6	12	100

	348	168	

Función a optimizar: $C(x, y) = 150x + 100y$
Restricciones:
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$18x + 6y \leq 348 \rightarrow 3x + y \leq 58$
$3x + 12y \leq 168 \rightarrow x + 4y \leq 56$
$2y \leq 3x \rightarrow 3x - 2y \geq 0$



Punto A $(0, 0) \rightarrow C(A) = 0$
Punto B $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + 4y = 56 \end{cases} \rightarrow B(8, 12) \rightarrow C(B) = 2400€$
Punto C $\begin{cases} x + 4y = 56 \\ 3x + y = 58 \end{cases} \rightarrow C(16, 10) \rightarrow C(C) = 3400€$
Punto D$(58/3, 0) \rightarrow C(D) = 2900$
Se obtiene un máximo de ventas (3400€) vendiendo 16 Hm. de tipo A y 10 Hm. de tipo B.

3. La cotización de las acciones de una determinada sociedad anónima, suponiendo que la bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la función siguiente:
$C(x) = x^3 - 45x^2 + 243x + 30000$, siendo x el número de días. Se pregunta:

a. ¿Cuál es la cotización de partida de las acciones de la sociedad?
b. Determinar los periodos de crecimiento y decrecimiento de las cotizaciones durante este mes.
c. Determinar los días en qué se consigue cotización máxima y mínima.

VER VÍDEO https://youtu.be/R0Y7rCDjLmc

a. $C(0) = 30000$

b. $C'(x) = 3x^2 - 90x + 243 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ x = 27 \end{array} \right. \rightarrow \begin{cases} C(0) = 30000€ \\ C(3) = 30351€ \\ C(27) = 23439€ \\ C(30) = 23790€ \end{cases}$

Crece de 0 a 3, decrece de 3 a 27 y crece de 27 a 30.
La cotización es máxima para x = 3 y vale 30351€ y es mínima para x = 27 y vale 23439€.

4. Un estudiante realiza dos pruebas en un mismo dia. La probabilidad de que apruebe la primera prueba es de 0.6; la probabilidad de que apruebe la segunda es de 0.8, y la probabilidad de que apruebe ambas es de 0.5.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe al menos una prueba?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no apruebe ninguna prueba?

c) Son "aprobar la primera prueba" y "aprobar la segunda prueba" sucesos independientes?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe la segunda prueba en caso de no haber superado la primera?

VER VÍDEO https://youtu.be/WPPHV3etR0k

Hacemos una tabla de contingencia.

	B	$\overline{B}$	
A	0'5	0'1	0'6
$\overline{A}$	0'3	0'1	0'4
	0'8	0'2	1

a) P(aprobar al menos una) = 1 – P(no aprobar ninguna) = 1 – 0'1 = 0'9

b) P(no aprobar ninguna) = 0'1

c) $P(A).P(B) = 0'48 \neq P(A\cap B) \rightarrow$ dependientes.

d) $P\left(\frac{B}{\overline{A}}\right) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0'3}{0'4} = 0'75$

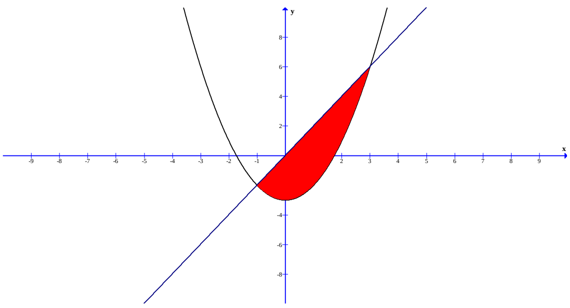
5. U.I.B. 2017. Dibuja el recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 3$ y $y = 2x$. Calcula el área.

VER VÍDEO https://youtu.be/1Q_nCjfMhoQ

1. Buscar los puntos de corte entre ambas funciones.

$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = 2x \end{cases} \rightarrow x^2 - 3 = 2x \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

2. Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde – 1 a 3, punto de corte inferior a punto de corte superior.



3. Calculamos el área.

$$\int_{-1}^{3} 2x - (x^2 - 3)dx = \frac{32}{3} \rightarrow \text{Área} = \frac{32}{3}u^2.$$

OPCIÓN B.

1. Consideramos la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-m} \end{pmatrix}$

a. Determinar para que valores de m existe A^{-1}.

b. Calcula A^{-1} para m = 2.

c. Resuelve para m = 2 el sistema: $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$.

VER VÍDEO https://youtu.be/hwq-hoDEZd8

a.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix};\ |A| = -m^2 + m + 1 = 0 \to m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Si $m \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \to |A| \neq 0 \to$ a si tiene inversa.

b.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix};\ |A| = -1$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to ADJ\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{ADJ\ A^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

c.

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2. Representar gráficamente el conjunto de puntos que satisfacen las inecuaciones lineales siguientes:

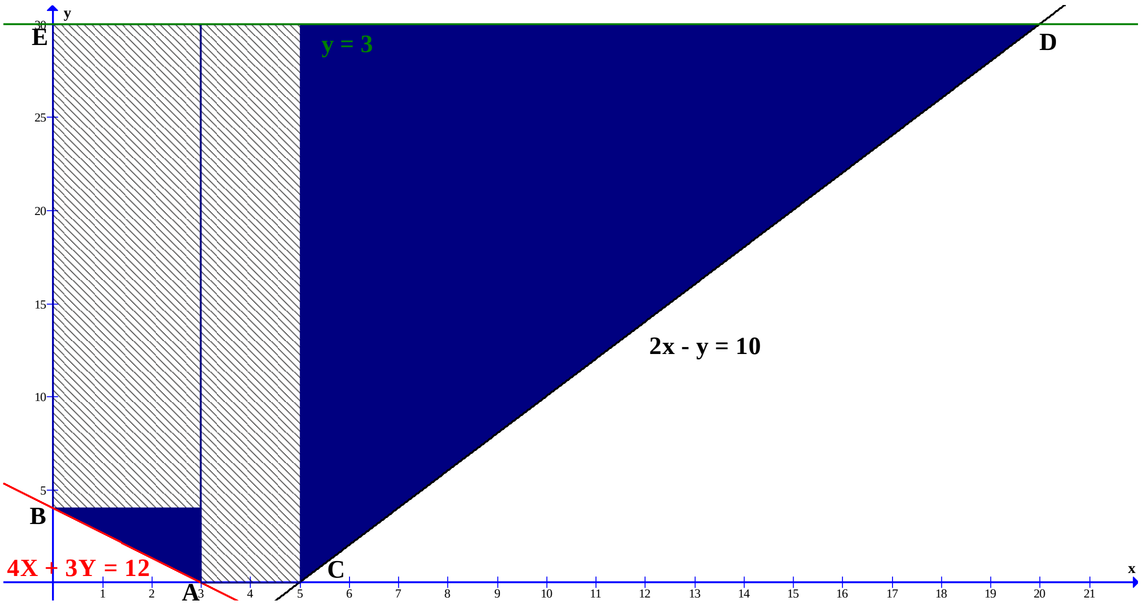
$$\begin{cases} \boldsymbol{4x + 3y \geq 12} \\ \boldsymbol{y \leq 30} \\ \boldsymbol{x \leq \dfrac{10 + y}{2}} \\ \boldsymbol{x \geq 0} \\ \boldsymbol{y \geq 0} \end{cases}$$

a. Indica si es o no una región acotada del plano. Señala sobre la gráfica los vértices y sus coordenadas, así como la ecuación que corresponde a cada una de las rectas que la delimita

b. Calcula el máximo de la función f(x,y) = x + 3y en el recinto anterior e indica donde se consigue.

c. Pertenece el punto (11, 10) a la región factible.

VER VÍDEO https://youtu.be/-tdhDFfrUeI



A(3, 0) → f(A) = 3
B(0, 4) → f(B) = 12
C(5, 0) → f(C) = 5
D(20, 30) → f(D) = 110
E(0, 30) → f(E) = 90
El máximo se consigue en el punto (20, 30) y vale 110.

$$(11,10)\begin{cases} 4\cdot 11 + 3\cdot 10 \geq 12 \text{ sí.} \\ 10 < 30 \text{ sí} \\ 2\cdot 11 - 10 \leq 10 \text{ no} \end{cases}$$

3. Considerar la función $f(x) = (x^2 + a)e^{ax}$, siendo a un parámetro real.

a. Razonar y determinar cual es el dominio de la función f(x).

b. Determinar el valor de a para que la gráfica de la función f(x) pase por el punto (0,4).

c. Para a = −2 determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x). ¿Existen máximos y mínimos relativos de f(x)? En caso afirmativo, decir donde se consiguen y sus valores.

VER VÍDEO https://youtu.be/MLxoxCZP3PE

a. La función no tiene x en el denominador, ni raíces de índice par, ni logaritmos. Su dominio es R.

b. f(0) = 4 → a = 4

c. $f(x) = (x^2 - 2)\cdot e^{-2x}$;

$$f'(x) = 2x\cdot e^{-2x} + (x^2 - 2)\cdot(-2)\cdot e^{-2x} = e^{-2x}\cdot(-2x^2 + 2x + 4) = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

−∞ DECRECE	− 1	CRECE	2	DECRECE +∞
f ‘(- 2) < 0	MÍN.	f ‘(- 0,5) > 0	MÁX.	f ‘(3) < 0

4. a. Para estudiar el consumo de leche, en litros, por persona y mes, se ha escogido una muestra de 150 personas con un consumo medio de 22 L. por persona y mes. Si este consumo sigue una distribución normal de desviación típica 6, determina un intervalo de confianza para el consumo medio por persona y mes con un nivel de confianza del 96 %.

b. Se quiere estimar el consumo medio de leche, en litros, por persona y mes. Si este consumo sigue una distribución normal con desviación típica 6, ¿cuál es el tamaño mínimo de la muestra que se necesita para dicha estimación con un error menor de 1 L y un nivel de confianza del 90 %?

VER VÍDEO https://youtu.be/d6z0f_RUZXE

a.

$$1-\alpha = 0{,}96 \rightarrow \alpha = 0{,}04 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}02 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}98 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}055$$

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (20{,}9933; 23{,}0067)$$

b.

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1{,}645\cdot 6}{1}\right)^2 = 97{,}4169 \rightarrow n > 97$$