SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

SELECTIVIDAD. MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2015. U.I.B.

OPCIÓN A.

1. **a. Comprobar si la matriz inversa de A coincide con su traspuesta.**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

b. Determinar en el caso en que sea posible la solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & \frac{k}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/-oJFeqbkaa4

a. Debe cumplirse que $A \cdot At = I \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. Se trata de un sistema homogéneo, los términos independientes son cero. Si el rango de A es 3 ($|A| \neq 0$) tendrá la llamada solución trivial, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$; si es menor que 3 ($|A| = 0$), tiene infinitas soluciones.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & \frac{k}{2} \end{pmatrix}; \ |A| = \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} - 1 = 0 \rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -1 \end{cases}$$

Si $k \neq 2$ y $k \neq -1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Solución trivial.

Si $k = 2$ o $k = -1 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow$ Infinitas soluciones.

2. **Representar gráficamente el conjunto de puntos que satisfacen las inecuaciones lineales siguientes:**

2x + 5y ≤ 50, (1) 3x + 5y ≤ 55, (2) 5x + 2y ≤ 60, (3) x + y ≤ 18, (4) x ≥ 0, y ≥ 0. (5)
Indicar si se trata o no de una región acotada del plano, señalar sobre la gráfica los vértices y sus coordenadas, así como la ecuación que corresponde a cada una de las rectas que la delimitan.

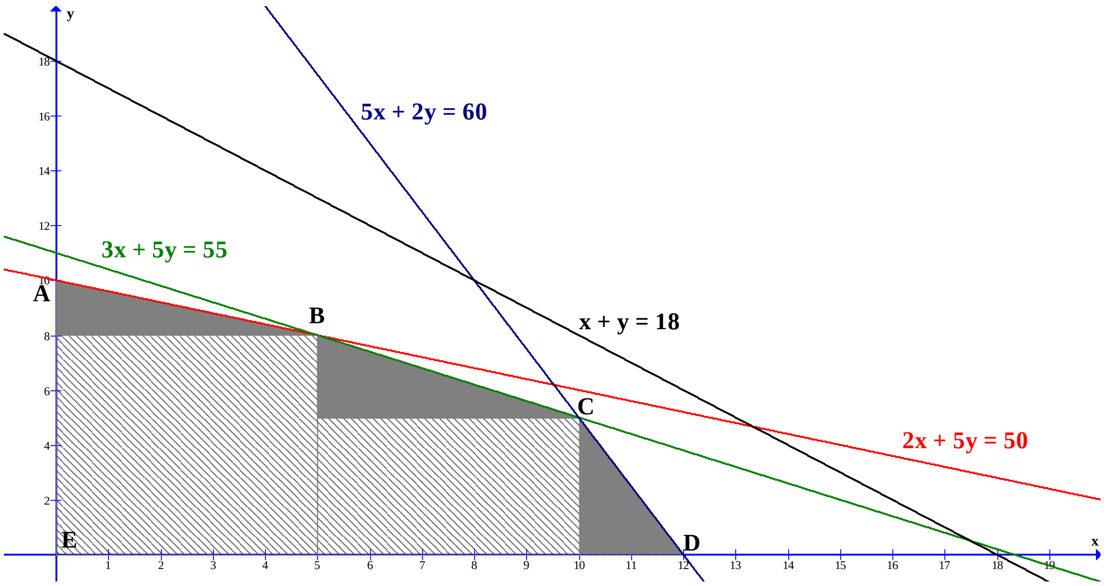
b. Indicar la posición de los puntos P = (5,5) y Q = (12,12) en relación con la región determinada en el apartado a.

c. Para la región representada en el apartado a determinar en qué puntos toma el valor máximo la función h(x,y) = 400x + 500y + 1000

VER VÍDEO https://youtu.be/muxbqzs91RQ

Función a optimizar: $h(x,y) = 400x + 500y + 1000$

Restricciones: $\begin{cases} 2x + 5y \leq 50 \\ 3x + 5y \leq 55 \\ 5x + 2y \leq 60 \\ x + y \leq 18 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$



A (0, 10) → $h(A) = 6000$

$B\begin{cases} 3x + 5y = 55 \\ 2x + 5y = 50 \end{cases} \rightarrow B(5,8) \rightarrow h(B) = 7000$

$C\begin{cases} 3x + 5y = 55 \\ 5x + 2y = 60 \end{cases} \rightarrow C(10,5) \rightarrow h(C) = 7500$

D (12, 0) → $h(D) = 5800$

E (0, 0) → $h(E) = 1000$

La función toma el valor máximo en el punto C.
El punto (5, 5) se encuentra en la región rayada.
El punto (12, 12) no cumple ninguna de las 4 primeras restricciones.

3. El nº de individuos, en millones, de una población, viene dado por la función:

$$\mathbf{P(t) = \frac{15 + t^2}{(t+1)^2}}$$

donde t se mide en años transcurridos desde t = 0. Calcular:

a. La población inicial y la población al cabo de 3 años.

b. El año en que se conseguirá la mínima población. ¿Cuál será dicha población?

c. ¿Cuál será el tamaño de la población a largo término?

VER VÍDEO https://youtu.be/Xr5SJOJk1TI

$$P(0) = \frac{15}{(0+1)^2} = 15 \rightarrow 15000000$$

$$P(3) = \frac{15+9}{(3+1)^2} = 1{,}5 \rightarrow 1500000$$

$$P'(t) = \frac{2t \cdot (t+1)^2 - (15+t^2) \cdot 2 \cdot (t+1)}{(t+1)^4} = \frac{2t \cdot (t+1) - (15+t^2) \cdot 2}{(t+1)^3} =$$

$$= \frac{2t^2 + 2t - 30 - 2t^2}{(t+1)^3} = \frac{2t-30}{(t+1)^3} = 0 \rightarrow 2t - 30 = 0 \rightarrow t = 15$$

$P'(14) < 0$ Decrece	15	$P'(16) > 0$ Crece.

Se confirma un mínimo.

$$P(15) = \frac{15 + 15^2}{(15+1)^2} = 0{,}9375 \rightarrow 937500$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{15+t^2}{(t+1)^2} = \frac{\infty}{\infty}(\text{ind.}) = 1 \rightarrow 1000000$$

La población se estabiliza cerca del millón.

4. La altura media de los jóvenes de 20 años de un pueblo sigue una distribución normal en media de 174 cm. y desviación típica 10 cm. Se elige una muestra simple de 144 jóvenes. Sea $\bar{x}$ la media de la muestra de las alturas observadas.

a. ¿Cuál es la media y la varianza de la variable aleatoria x?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la altura media de la muestra este entre 173 cm. y 175 cm.?

VER VÍDEO https://youtu.be/TDT4xT8_x5c

a. Media $\mu = 174$ cm. y varianza $\sigma^2 = 100$ cm²

b.

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(174, \frac{10}{\sqrt{144}}\right) = N(174; 0{,}833)$$

$$P(173 < \bar{x} < 175) = P(\bar{x} < 175) - P(\bar{x} < 173) =$$

$$= P\left(z < \frac{175-174}{0{,}833}\right) - P\left(z < \frac{173-174}{0{,}833}\right) = \overbrace{P(z < 1{,}2)}^{0{,}8849} - P(z < -1{,}2) =$$

$$\overbrace{P(z < 1{,}2)}^{0{,}8849} - \left(1 - \overbrace{P(z < 1{,}2)}^{0{,}8849}\right) = 0{,}7698$$

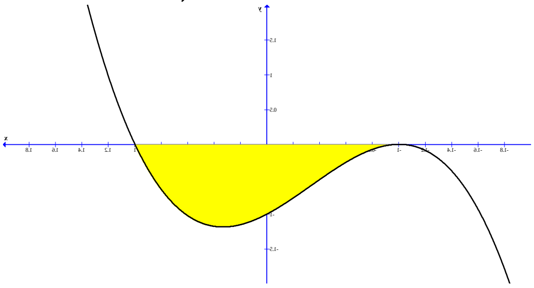
5. Dibuja el recinto limitado por la curva $y = x^3 + x^2 - x - 1$ y el eje X. Calcula el área.

VER VÍDEO https://youtu.be/zJwaDSQqCf0

1. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

2. Representamos la función, basta hacerlo de – 1 a 1.



3. Calculamos el área.

$$\int_{-1}^{1} (x^3 + x^2 - x - 1)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{1} = \frac{-4}{3} \rightarrow \text{Área} = \frac{4}{3} u^2.$$

OPCIÓN B.

1. **a. En una ebanistería se producen sillas, mesas y armarios, en total 350 piezas mensuales. Las horas de mano de obra invertidas son, 2 horas por silla, 3 horas por mesa y 5 horas por armario y se utiliza una plancha de madera por silla 2, planchas por mesa y 3 planchas por armario. Si se dispone de un total de 1050 horas y de 625 planchas de madera al mes, ¿Cuántas unidades de cada mueble se pueden fabricar en este tiempo?**

b. Determina el valor de a para que la matriz no tenga inversa $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix}$

VER VÍDEO https://youtu.be/XsIIHhz9MBg

a.

$$\begin{cases} S + M + A = 350 \\ 2S + 3M + 5A = 1050 \\ S + 2M + 3A = 625 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} S = 125 \\ M = 175 \\ A = 50 \end{cases}$$

b.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 2a + 18 + 15 - (12 + 15 + 3a) = -a + 6 = 0 \rightarrow a = 6$$

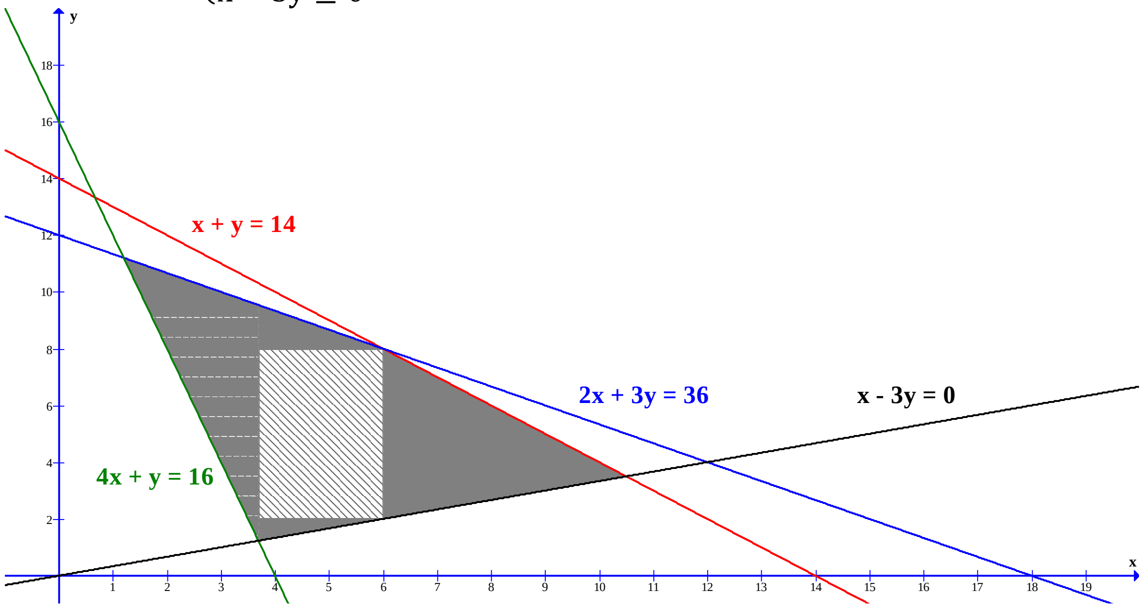
Si $a \neq 6$, $|A| \neq 0$, la matriz tiene inversa. Si $a = 6$, $|A| = 0$, la matriz no tiene inversa.

2. **a. Representar gráficamente el conjunto de puntos que satisfacen las inecuaciones lineales siguientes: $x + y \leq 14$, (1) $2x + 3y \leq 36$, (2) $4x + y \geq 16$, (3) $x-3y \leq 0$. (4) indicar si es o no una región acotada del plano. Señala sobre la gráfica los vértices y sus coordenadas, así como la ecuación que corresponde a cada una de las rectas que la delimitan.**

b. ¿Qué restricciones satisfacen los puntos P = (0,5), Q = (5,15) i R = (0,15)?

VER VÍDEO https://youtu.be/ytxYus8vP_8

$$\text{Restricciones.}\begin{cases} x + y \le 14 \\ 2x + 3y \le 36 \\ 4x + y \ge 16 \\ x - 3y \le 0 \end{cases}$$



$$P = (0,5)\begin{cases} x + y \le 14 \to 0 + 5 \le 14, \text{sí} \\ 2x + 3y \le 36 \to 0 + 15 \le 36, \text{sí} \\ 4x + y \ge 16 \to 5 \ge 16, \text{no} \\ x - 3y \le 0 \to -15 \le 0, \text{sí} \end{cases}$$

$$Q = (5,15)\begin{cases} x + y \le 14 \to 5 + 15 \le 14, \text{no} \\ 2x + 3y \le 36 \to 5 + 45 \le 36, \text{no} \\ 4x + y \ge 16 \to 20 + 15 \ge 16, \text{sí} \\ x - 3y \le 0 \to 5 - 45 \le 0, \text{sí} \end{cases}$$

$$R = (0,15)\begin{cases} x + y \le 14 \to 15 \le 14, \text{no} \\ 2x + 3y \le 36 \to 45 \le 36, \text{no} \\ 4x + y \ge 16 \to 15 \ge 16, \text{no} \\ x - 3y \le 0 \to -45 \le 0, \text{sí} \end{cases}$$

3. Considerar la siguiente f(x). Se pregunta:

$$\mathbf{f(x) = \frac{-4x}{1 + x^2}}$$

a. Calcula la derivada de dicha función
b. Resuelve la ecuación f′(x) = 0
c. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función
d. Determina los máximos y mínimos de la función.
e. Calcula f″(x) y resuelve la ecuación f″(x) = 0. Razona si existe o no un punto de inflexión.

VER VÍDEO https://youtu.be/IO17YD8CYjw

a. $f'(x)=\frac{-4\cdot(1+x^2)+4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{-4-4x^2+8x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{4x^2-4}{(1+x^2)^2}$

b. $\frac{4x^2-4}{(1+x^2)^2}=0\rightarrow 4x^2-4=0\rightarrow x=\pm 1$

c. Estudiamos el dominio y el signo de la derivada.

$1+x^2=0$, no existe solución real.

d.

f ’(-2) > 0 Crece ↗	–1	f ’(0) < 0 Decrece ↘	1	f ’(2) > 0 Crece ↗

En (–1, 2) hay un máximo. En (1, –2) hay un mínimo.

e.

$$f''(x)=\frac{8x\cdot(1+x^2)^2-(4x^2-4)\cdot 2x\cdot(1+x^2)}{(1+x^2)^4}=\frac{8x\cdot(1+x^2)-(4x^2-4)\cdot 2x}{(1+x^2)^3}=$$

$$\frac{8x+8x^3-8x^3+8x}{(1+x^2)^3}=\frac{16x}{(1+x^2)^3}=0\rightarrow x=0$$

Estudio del signo de la segunda derivada:

f ”(– 1) < 0 Convexa ∩	0	f ”(1) > 0 Concava U

Existe un punto de inflexión en (0, 0).

4. Este problema no aparece en el examen. Lo he cambiado por uno de integrales.

Resolver:

a. $\int_{\sqrt[3]{3}}^{\sqrt[3]{4}}\frac{3x}{x^2+1}\cdot dx$

VER VÍDEO https://youtu.be/GBiK16D-gBg

b. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}}x^2\cdot\sqrt[3]{2-3x^3}\cdot dx$

VER VÍDEO https://youtu.be/ab4rxP4vn50

a. $\int_{\sqrt[3]{3}}^{\sqrt[3]{4}}\frac{3x}{x^2+1}\cdot dx=3\cdot\frac{1}{2}\int_{\sqrt[3]{3}}^{\sqrt[3]{4}}\frac{2x}{x^2+1}\cdot dx=\left[\frac{3}{2}\cdot\ln|x^2+1|\right]_{\sqrt[3]{3}}^{\sqrt[3]{4}}=$

$$=\frac{3}{2}\cdot\ln\left|\sqrt[3]{16}+1\right|-\frac{3}{2}\cdot\ln\left|\sqrt[3]{9}+1\right|=0{,}2$$

b. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}}x^2\cdot\sqrt[3]{2-3x^3}\cdot dx=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}}x^2\cdot(2-3x^3)^{\frac{1}{3}}dx=$

$$\frac{-1}{3}\cdot\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}}-3\cdot x^2\cdot(2-3x^3)^{\frac{1}{3}}dx=\left[\frac{-1}{3}\cdot\frac{(2-3x^3)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}}=0{,}035$$