SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

SELECTIVIDAD MATEMÁTICAS APLICADAS U.I.B. JUNIO 2016.

OPCIÓN A.

1. Discutir para que valores de m el sistema tiene solución.

$$\begin{cases} \mathbf{x + my + z = 1} \\ \mathbf{3x + 2y + z = -1} \\ \mathbf{mx + y - z = -1} \end{cases}$$

Resolverlo, si es posible, cuando m = 1

VER VÍDEO https://youtu.be/BEeGBQLW4eQ

VER VÍDEO https://youtu.be/jXcSR56oYYc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ m & 1 & -1 \end{pmatrix};\ |A| = m^2 + m = 0 \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

Si m ≠ - 1 y m ≠ 0 → |A| ≠ 0 → RA = RA* = 3 = nº incógnitas. S. compatible determinado.

Si m = 0

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow RA \geq 2 \\ |A| = 0 \end{cases} \rightarrow RA = 2 \\ A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow RA^* \geq 2 \\ |A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \end{cases} \rightarrow RA^* = 3 \end{array} \right\}$$

Sistema incompatible.

Si m = – 1

$$\left\{\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\left\{\begin{array}{l}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\neq 0\rightarrow RA\geq 2\\ |A|=0\end{array}\right.\rightarrow RA=2\\ A^{*}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\left\{\begin{array}{l}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\neq 0\rightarrow RA^{*}\geq 2\\ |A|=0\rightarrow\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0\end{array}\right.\rightarrow RA^{*}=2\end{array}\right\}$$

Sistema compatible indeterminado.

$$\begin{cases}x+y+z=1\\ 3x+2y+z=-1\\ x+y-z=-1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=2\\ z=1\end{cases}$$

2. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tiene un extremo relativo en $x = 2$ y un punto de inflexión en $x = 3$. Calcular los valores de a y b, y determinar si este extremo es máximo o mínimo relativo.

VER VÍDEO https://youtu.be/gw-C-kp5_mY

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f''(x) = 6x + 2a$

Un extremo en $x = 2 \rightarrow f'(2) = 0 \rightarrow 12 + 4a + b = 0 \rightarrow b = 24$

Un punto de inflexión en $x = 3 \rightarrow f''(3) = 0 \rightarrow 18 + 2a = 0 \rightarrow a = -9$

$f''(2) < 0 \rightarrow$ máximo.

3. a. Si la probabilidad de la intersección de dos sucesos independientes es 0.2 y la de su unión es 0.7, ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de los sucesos?

b. En un experimento se sabe que $p(A) = 0.6$, $p(B) = 0.3$ y $p(A|B) = 0.1$. Calcular $p(A\cup B)$.

VER VÍDEO https://youtu.be/RbdRgjByfco

a. Si dos sucesos son independientes $P(A)\cdot P(B) = P(A\cap B)$. Además, sabemos que

$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$$\begin{cases}P(A)\cdot P(B)=0{,}2\\ 0{,}7=P(A)+P(B)-0{,}2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}P(A)=0{,}4 \text{ y } P(B)=0{,}5\\ P(A)=0{,}5 \text{ y } P(B)=0{,}4\end{cases}$$

b.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\rightarrow P(A\cap B)=0{,}03$$

$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0{,}87$

4. Se asume que la cantidad de agua (en litros) recolectada cada día en una estación meteorológica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución típica normal $\sigma = 2$. Se elige una muestra aleatoria y se obtienen los siguientes resultados de agua recogida cada día en litros: 8,8; 3,8; 6,5; 3,6; 5,5; 7,5; 3,5; 8,9; 7,9; 4

a. Determina un intervalo de confianza para la cantidad promedio de agua recolectada cada día en la estación, con un nivel de confianza de 95%.

b. Calcular el tamaño de la muestra para estimar el promedio de agua recolectada cada día, mediante la estimación de la media de esta muestra, siendo la amplitud del intervalo de confianza menor de un litro, con un 98% de nivel de confianza.

VER VÍDEO https://youtu.be/t6gRQUxGO7I

a.

$\bar{x} = 6$

$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4{,}7604; 7{,}2396)$$

b. Amplitud del intervalo = 2·E → E = 0,5

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2{,}325\cdot 2}{0{,}5}\right)^2 = 86{,}49 \rightarrow n > 86$$

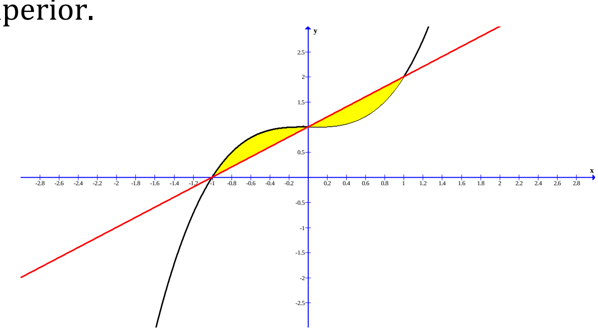
5. U.IB. 2019. Dibuja el área comprendida entre las gráficas de las funciones siguientes y calcula el área del recinto anterior. $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = x + 1$

VER VÍDEO https://youtu.be/EF3V8z8No9Q

1. Buscar los puntos de corte entre ambas funciones.

$$x^3 + 1 = x + 1 \rightarrow x^3 - x = 0 \rightarrow x\cdot(x^2-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

2. Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde – 1 a 1, punto de corte inferior a punto de corte superior.



3. Calculamos el área.

$$\int_{-1}^{0}[x^3 + 1 - (x+1)]dx = \int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\int_{0}^{1}[x + 1 - (x^3+1)]dx = \int_{0}^{1}(x - x^3)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Área total } = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}u^2$$

OPCIÓN B.

1. **a. Sea A =** $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ y+x & 7 & 7 \end{pmatrix}$ **y B =** $\begin{pmatrix} -1 & x+y & 1 \\ 3 & x+y+z & x+y+z \end{pmatrix}$ **dos matrices de orden 2x3 con x, y y z pertenecientes a R.**

a.1. Determinar el valor de x, y y z sabiendo que A = B.

a.2. ¿Es posible el cálculo a A·B? Razona la respuesta.

b. Dar un ejemplo de cada una de las siguientes matrices: matriz identidad, matriz simétrica y matriz diagonal que no sea la identidad.

VER VÍDEO https://youtu.be/pqoT3GjSmVE

a.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ y+x & 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x+y & 1 \\ 3 & x+y+z & x+y+z \end{pmatrix} \to \begin{cases} x+y=3 \\ x+y+z=7 \end{cases} \to \begin{cases} x = 3-\alpha \\ y = \alpha \\ z = 4 \end{cases}$$

A·B = (2x3)·(2x3) no es posible pues el número de columnas de la primera matriz debe coincidir con el número de filas de la segunda.

b.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Se quiere organizar un puente aéreo entre las islas de Mallorca y Menorca con plazas suficientes de pasaje y carga para transportar cómo mínimo 1600 personas y 96 toneladas de equipaje y mercancías. Para ello disponemos de dos tipos de aviones, 11 de tipo A y 8 de tipo B. La contratación de un avión del tipo A cuesta 4000 € y puede transportar 200 personas y 6 toneladas de mercancía. El avión de tipo B cuesta 1000 € y puede transportar 100 personas y 15 toneladas. ¿Cuántos aviones de cada tipo han de utilizarse para que el coste sea mínimo?

VER VÍDEO https://youtu.be/mu0CTsEbJvg

	PERSONAS	EQUIPAJE	Nº AVIONES	COSTE
TIPO A (x)	200	6	11	4000€
TIPO B (y)	100	15	8	1000€
	1600	96		

Función a optimizar: $C(x, y) = 4000\,x + 1000\,y$

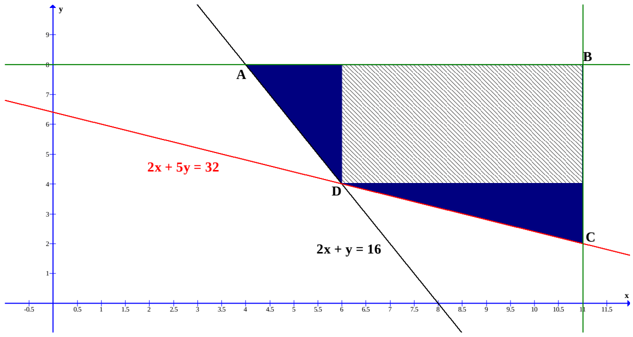
Restricciones.

$x \geq 0; x \leq 11$

$y \geq 0; y \leq 8$

$200x + 100y \geq 1600 \to 2x + y \geq 16$

$6x + 15y \geq 96 \to 2x + 5y \geq 32$



$$\text{Punto A}\begin{cases} y = 8 \\ 2x + y = 16 \end{cases} \rightarrow A(4,8) \rightarrow C(A) = 24000€$$

$$\text{Punto } B(11,8) \rightarrow C(B) = 52000€$$

$$\text{Punto C}\begin{cases} x = 11 \\ 2x + 5y = 32 \end{cases} \rightarrow C(11,2) \rightarrow C(C) = 46000€$$

$$\text{Punto D}\begin{cases} 2x + y = 16 \\ 2x + 5y = 32 \end{cases} \rightarrow D(6,4) \rightarrow C(C) = 28000€$$

Para minimizar costes utilizaremos 4 aviones del tipo A y 8 del tipo B para un coste mínimo de 24000€.

3. El beneficio neto en miles de euros obtenido por la venta de x unidades de un artículo viene dado por la función B(x) = $-x^2 + 9x-16$.

a. ¿Cuál es la función que determina el beneficio neto unitario?

b. Calcula el número de unidades del artículo que se han de vender para obtener un beneficio neto, por unidad, máximo.

c. Determina este beneficio neto máximo, por unidad.

VER VÍDEO https://youtu.be/UT7QwB2yGmg

a.

$$\frac{B(x)}{x} = \overline{B}(x) = -x + 9 - \frac{16}{x}$$

b.

$$\overline{B}'(x) = -1 + \frac{16}{x^2} = 0 \rightarrow x = 4$$

$\overline{B}'(3{,}9) > 0$ CRECE	4 MÁXIMO	$\overline{B}'(4{,}1) < 0$ DECRECE

c. $\overline{B}(4) = 1 \rightarrow 1000$ €

4. Una empresa dedicada a la elaboración de productos derivados del maíz tiene una determinada máquina que empaqueta los granos de maíz en sacos que siguen una distribución normal con μ = 250 g. y σ = 25 g. Las bolsas están empaquetadas en cajas de 200 unidades.

a. Determine la distribución de las medias de las muestras.

b. Calcule la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas en un paquete sea más pequeña de 245 g.

c. Calcula la probabilidad de que una caja de 200 sacos pese más de 51 kg.

VER VÍDEO VER VÍDEO https://youtu.be/BarAlI97ilQ a.

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(250, \frac{25}{\sqrt{200}}\right)$$

b.

$$P(\bar{x} \leq 245) = P\left(z \leq \frac{245 - 250}{\frac{25}{\sqrt{200}}}\right) = P(z \leq -2{,}83) = 1 - \overbrace{P(z \leq 2{,}83)}^{0{,}9977} = 0{,}0023$$

c. En este caso tenemos:

$$N\left(n \cdot \mu, \sigma \cdot \sqrt{n}\right) = N\left(50000{,}25\sqrt{200}\right)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{200} x_i \geq 51000\right) = P\left(z \geq \frac{51000 - 50000}{25\sqrt{200}}\right) = P(z \geq 2{,}83) = 1 - \overbrace{P(z \leq 2{,}83)}^{0{,}9977} = 0{,}0023$$