SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

VECTORES EN EL ESPACIO.

1. Determina todos los vectores de módulo dos que son ortogonales a los vectores $\vec{\mathbf{a}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, -\mathbf{1})$ y $\vec{\mathbf{b}} = (\mathbf{3}, -\mathbf{2}, \mathbf{0})$

Para hallar un vector ortogonal a $\vec{a}$ y $\vec{b}$ buscamos su producto vectorial

$$\vec{c} = \vec{a}x\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, -3, -7)$$

$\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \left(\dfrac{-2}{\sqrt{62}}, \dfrac{-3}{\sqrt{62}}, \dfrac{-7}{\sqrt{62}}\right)$; vector unitario perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|} \cdot 2 = \left(\dfrac{-4}{\sqrt{62}}, \dfrac{-6}{\sqrt{62}}, \dfrac{-14}{\sqrt{62}}\right)$; vector unitario perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y de módulo 2.

2. Dados los vectores $\vec{\mathbf{a}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, -\mathbf{1})$ y $\vec{\mathbf{b}} = (\mathbf{3}, -\mathbf{2}, \mathbf{0})$ y $\vec{\mathbf{c}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{1})$ calcula:

- **a. El producto escalar de $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{c}}$.**
- **b. El producto vectorial de $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$.**
- **c. El ángulo que forman $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$.**
- **d. Hallar k para que el vector (k, 1, 3) sea perpendicular a $\vec{\mathbf{c}}$.**
- **e. Son linealmente dependientes $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ y $\vec{\mathbf{c}}$.**
- **f. El área del paralelogramo determinado por $\vec{\mathbf{b}}$ y $\vec{\mathbf{c}}$.**
- **g. El volumen del paralelepípedo que forman por $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ y $\vec{\mathbf{c}}$.**
- **h. ¿Forman una base los vectores $\vec{\mathbf{b}}$ y $\vec{\mathbf{c}}$. Y los vectores $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ y $\vec{\mathbf{c}}$?**

a. $\vec{a} \cdot \vec{c} = (2,1,-1) \cdot (1,2,-1) = 5$

b. $\vec{a}x\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, -3, -7)$

c.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{(2,1,-1) \cdot (3,-2,0)}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{9+4}} = \frac{2\sqrt{78}}{39} \to \alpha = 26{,}93°$$

d. $(k, 1, 3)\cdot(1, 2, -1) = k + 2 - 3 = 0;\ k = 1$

e. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$; Son linealmente independientes.

f.

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\left(\vec{b}x\vec{c}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|(2,3,8)| = \frac{1}{2}\sqrt{4+9+64} = \frac{\sqrt{77}}{2}u^2$$

g.

$$\text{Volumen} = \left|\begin{vmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}\right| = 1\ u^3.$$

h. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \to$ Rango 2. Forman una base del plano que definen.

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$; forman base de R^3.

3. Dados los vectores $\vec{a} = (1, 1, -1)$ y $\vec{b} = (-3, 3, m)$.

a. Hallar m para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares.

b. Hallar m para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean paralelos.

c. Hallar, para m = 0, un vector $\vec{c}$ perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

d. $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$. Son una base ortogonal de R^3. A partir de ella obtén una base ortonormal de R^3.

e. Escribe el vector (1, 2, 3) como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$

a. $(1,1,-1)\cdot(-3,3,m) = 0; -3 + 3 - m = 0; m = 0$

b.

$$\frac{1}{-3} = \frac{1}{3} = \frac{-1}{m} \to \nexists m \text{ para que los vectores sean paralelos.}$$

c. $\vec{a}x\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (3,3,6)$

d. $\begin{cases} \vec{a} = (1,1,-1) \\ \vec{b} = (-3,3,0) \\ \vec{c} = (3,3,6) \end{cases} \to \begin{cases} \vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \vec{b} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \\ \vec{c} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \end{cases}$

e. $(1,2,3) = x(1,1,-1)\cdot y(-3,3,0)\cdot z(3,3,6) \to \begin{cases} x - 3y + 3z = 1 \\ x + 3y + 3z = 2 \\ -x + 6z = 3 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{6} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$(1,2,3) = 0\cdot(1,1,-1) + \frac{1}{6}\cdot(-3,3,0) + \frac{1}{2}\cdot(3,3,6)$$

4. Calcula el valor de m de modo que el área del triángulo determinado por los vectores

$\vec{a} = (2, -1, 4)$ y $\vec{b} = (0, 3, m)$ sea igual a $3\sqrt{5}\ u^2$.

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\left(\vec{a}x\vec{b}\right)\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & m \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|(-m-12, -2m, 6)| =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(-m-12)^2 + (-2m)^2 + 36} = 3\sqrt{5};\ \sqrt{m^2 + 24m + 144 + 4m^2 + 36} = 6\sqrt{5}$$

$$5m^2 + 24m + 180 = 36 \cdot 5; 5m^2 + 24m = 0; m \cdot (5m + 24) = 0; \begin{cases} m = 0 \\ m = \dfrac{-24}{5} \end{cases}$$

5. Hallar un vector de módulo 10 que sea perpendicular a $\vec{a} = (3, -1, 0)$ y forma un ángulo de 60° con $\vec{b} = (0, 0, 1)$.

Perpendicular a $\vec{a}$: $\vec{a}\cdot(x, y, z) = 0 \rightarrow 3x - y = 0$

Módulo 10: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 10 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 100$

$$\cos 60° = \frac{(x, y, z) \cdot (0,0,1)}{|\vec{x}| \cdot 1} = \frac{1}{2}; \frac{z}{10} = \frac{1}{2}; z = 5$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{7{,}5}, y = 3 \cdot \sqrt{7{,}5}; z = 5 \\ x = -\sqrt{7{,}5}, y = -3 \cdot \sqrt{7{,}5}; z = 5 \end{cases}$$

6. Hallar m para que $\vec{a} = (2, 1, -1)$ y $\vec{b} = (3, -2, 0)$ y $\vec{c} = (-1, 3, m)$ sean linealmente dependientes. Para dicho valor de m, halla la relación de dependencia.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & m \end{vmatrix} = -4m - 9 - (-2 + 3m) = -7m - 7 = 0; m = -1$$

$$(2,1,-1) = x \cdot (3,-2,0) + y \cdot (-1,3,-1) \rightarrow \begin{cases} 2 = 3x - y \\ 1 = -2x + 3y \\ -1 = -y \end{cases} \rightarrow \{y = 1;\ x = 1$$

$$(2,1,-1) = (3,-2,0) + (-1,3,-1)$$