SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

ESTUDIO Y REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES.

1. U.I.B. 2019. Calcular los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x - 2$, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y hacer un boceto de su gráfica para x entre – 3 y 3.

VER VIDEO https://youtu.be/suMiy94Mi9M

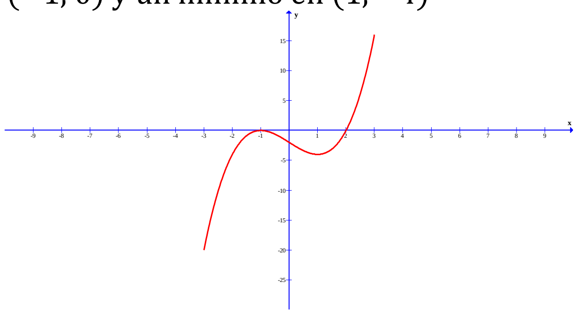
El dominio de la función es R.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f ‘ (x)		+	0	–	0	+	
f(x)		↗	0	↘	– 4	↗	

La función crece de $(-\infty, -1)$ U $(0, +\infty)$ y decrece de $(-1, 1)$

Tiene un máximo en $(-1, 0)$ y un mínimo en $(1, -4)$



2. U.I.B. 2019. Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años y su precio P(t) en miles de euros varió con el tiempo (en años) que llevaba en el mercado, según la función siguiente:

$$\mathbf{P(t)} = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40 & 0 \le t \le 6 \\ \frac{-113}{14} \cdot t^2 + \frac{3826}{7} & 6 < t \le 8 \end{cases}$$

a. ¿Cuál fue el precio de salida del producto?

b. ¿Es continua la función, es derivable?

c. ¿Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento del precio del producto?

d. ¿En qué momento se obtuvo el precio máximo y el precio mínimo y cuáles fueron éstos?

VER VIDEO https://youtu.be/UdIw6w2e-8E

a. El precio de salida (t = 0) fue de 40000 €.

b.

$$\text{Continuidad en } t=6 \begin{cases} P(6)=256 \\ \lim\limits_{t\to 6} P(t) = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 6^-} \frac{1}{3}t^3+4t^2+40=256 \\ \lim\limits_{t\to 6^+} \frac{-113}{14}\cdot t^2+\frac{3826}{7}=256 \end{cases} \end{cases}$$

Como $P(6)=\lim\limits_{t\to 6^-} P(t)=\lim\limits_{t\to 6^+} P(t)=256$, la función es continua en $t=6$.

En el resto del intervalo (0, 8) es continua por ser función polinómica.

Derivabilidad en t = 6.

$$P'(t)=\begin{cases} t^2+8t & 0<t<6 \\ \frac{-113}{7}\cdot t & 6<t<8 \end{cases} \to \begin{cases} P'(6^-)=84 \\ P'(6^+)=\frac{-678}{7} \end{cases}$$

Como $P'(6^-)\neq P'(6^+)$, la función no es derivable en $t=6$.

En el resto del intervalo (0, 8) es derivable por ser función polinómica.

c y d.

$$t^2+8t=0 \to \begin{cases} t=0 \\ t=-8 \text{ no válido} \end{cases}$$

$$\frac{-113}{7}\cdot t=0 \to t=0, \text{no válido.}$$

t	0		6		8
P(t)	40	↗	256	↘	30
P'(t)	0	+		–	

Crece en (0,6), decrece en (6, 8), toma el valor máximo 256 en t=6 y toma el valor mínimo 30 en t = 8.

3. U.I.B. 2019. El número de visitantes de un museo viene expresado mediante la siguiente función donde t es la hora desde la apertura del museo. Suponemos que la hora de apertura del museo son las 9:00 de la mañana.

$$\mathbf{V(t)=\frac{300t}{t^3+2}}$$

a. ¿Cuándo crece y decrece el número de visitantes del museo?

b. ¿Cuándo recibe el museo el mayor número de visitantes? ¿Cuál es este número?

c. ¿En qué valor de t se produce un punto de inflexión de la función V(t)?

VER VIDEO https://youtu.be/kKnm6PlgnXQ

a y b.

$$V'(t)=\frac{300\cdot(t^3+2)-300t\cdot 3t^2}{(t^3+2)^2}=\frac{600-600t^3}{t^3+2}=0 \to t=1$$

0		1		CIERRE
V(t)	+	100	–	
V'(t)	↗	0	↘	

El número de visitantes crece durante la primera hora y decrece a continuación.

Recibe un máximo de 100 visitantes la primera hora.

c.

$$V''(t) = \frac{1800t^5 - 7200t^2}{(t^3+2)^3} = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt[3]{4} \end{cases} \text{Punto de inflexión para } t = \sqrt[3]{4}$$

4. U.I.B. 2019. El número de vehículos que ha pasado cierto día por el peaje de una autopista viene dado por la siguiente función: donde n indica el número de vehículos y t el tiempo transcurrido en horas desde las 0 horas.

$$\mathbf{N(t)} = \begin{cases} \left(\frac{\mathbf{t-3}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{2}} + \mathbf{2} & \mathbf{si\ 0 \le t \le 9} \\ \mathbf{10} - \left(\frac{\mathbf{t-15}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{2}} & \mathbf{si\ 9 < t \le 24} \end{cases}$$

a. ¿Es continua la función?

b. ¿Entre qué horas aumentó el número de vehículos que pasaba por el peaje y entre qué horas disminuyó?

c. ¿A qué hora pasó el mayor número de vehículos?, ¿Cuántos fueron?

VER VIDEO https://youtu.be/ZQ9L7dFHw94

a. Estudiamos la continuidad.
En [0,9) es continua pues es polinómica.
En (9,24] es continua pues es polinómica.
En t = 9.

$$\begin{cases} N(9) = \left(\frac{9-3}{3}\right)^2 + 2 = 6 \\ \lim_{t\to 9} N(t) = \begin{cases} \lim_{t\to 9^-} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2 = 6 \\ \lim_{t\to 9^+} 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2 = 6 \end{cases} \end{cases} \rightarrow N(9) = \lim_{t\to 9} N(t) \rightarrow \text{continua.}$$

Es continua en todo su dominio [0,24].

b. Derivamos, igualamos a cero y resolvemos.

$$N'(t) = \begin{cases} 2\left(\frac{t-3}{3}\right) & \text{si } 0 < t < 9 \\ -2\left(\frac{t-15}{3}\right) & \text{si } 9 < t < 24 \end{cases}$$

$$2\left(\frac{t-3}{3}\right) = 0 \rightarrow t = 3$$

$$-2\left(\frac{t-15}{3}\right) = 0 \rightarrow t = 15$$

t	0		3		9		15		24
N(t)	3		2		6		10		1
N'(t)		– ↘	0	+ ↗		+ ↗	0	– ↘	

Disminuyó entre las 0 y las 3 y entre las 15 y las 24 h.
Aumentó entre las 3 y las 15 h.

El mayor número de vehículos (10) se dio a las 15 h.

5. U.I.B. 2018. Los beneficios (en miles de euros) por la venta de un producto en función de la inversión realizada en promoción (en miles de euros), viene dada por

$$\mathbf{B(x)=\begin{cases}5x+15, & si\ 0\le x\le 3\\ -(x-3)^2+30 & si\ 3<x\le 8\end{cases}}$$

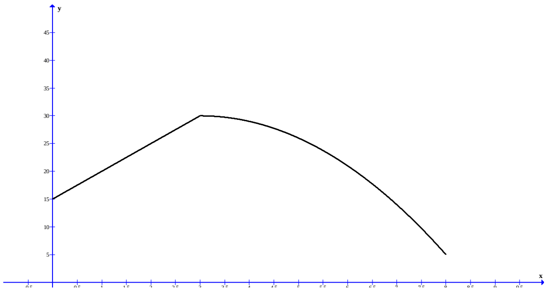
a. ¿Es continua esta función, es derivable? Represéntala gráficamente.
b. ¿Cuándo crece y cuando decrece la función beneficio?
c. ¿Cuándo se obtienen los beneficios mínimo y máximo?
d. Representa la función derivada.

VER VIDEO https://youtu.be/nRVqZ9Mn0dM

a. Las funciones polinómicas son continuas en R. Debemos estudiar la continuidad en x = 3

$$\left.\begin{cases}B(3)=30\\ \lim_{x\to 3}B(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 3^-}5x+15=30\\ \lim_{x\to 3^+}-(x-3)^2+30=30\end{cases}\end{cases}\right\}\to B(3)=\lim_{x\to 3}B(x)\to$$

B(x)es continua en x = 3



Viendo la gráfica podemos definir los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. La función tiene un punto anguloso en x = 3, lo que implica que no es derivable en dicho punto.

6. U.I.B. 2018. El rendimiento de los trabajadores de una fábrica (valorado en una escala de 0 a 100), durante una jornada de 8 horas, viene dada por la siguiente función:

$$\mathbf{r(t)=\begin{cases}-10t^2+60t & si\ 0\le t<4\\ 80 & si\ 4\le t<6\\ 170-15t & si\ 6\le t\le 8\end{cases}}$$ **, donde t es el tiempo en horas.**

a. Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. ¿cuál es el máximo rendimiento?

b. ¿En qué instantes la jornada laboral tiene un rendimiento situado a mitad de la escala?

VER VIDEO https://youtu.be/hsnJ2U-1WNw

$$r'(t)=\begin{cases}-20t+60 & si\ 0\le t<4\\ 0 & si\ 4\le t<6\\ -15 & si\ 6\le t\le 8\end{cases},\ r'(t)=0\to t=3$$

t	r(t)
0	0
3	90
4	80

6	80
8	50

Crece de 0 a 3, decrece de 4 a 4, se mantiene de 4 a 6 y decrece de 6 a 8.
El máximo rendimiento se da a las 3 horas y vale 90.

b. Mitad de tabla es nota = 50

$$\begin{cases} -10t^2 + 60t = 50 \to \begin{cases} t = 1 \\ t = 5 \text{ (no sirve pues no está entre 0 y 4)} \end{cases} \\ 170 - 15t = 50 \to t = 11{,}3 > 8, \text{no sirve.} \end{cases}$$

7. U.I.B. 2017. Una empresa de compra venta de automóviles ha comprobado que en los últimos 10 años sus beneficios/perdidas se ajustan a la función $F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3$ ($0 \leq t \leq 10$), en miles de euros. Se pregunta:

a. ¿En qué año se produce el valor máximo y mínimo de esta función?

b. Determina los periodos de crecimiento y de decrecimiento.

c. ¿Cuáles son los beneficios máximos? ¿Qué resultado tuvo la empresa el último año del estudio?

VER VIDEO https://youtu.be/1voJbFdTsUU

$$F' = 3t^2 - 36t + 81 = 0 \to \begin{cases} t = 3 \\ t = 9 \end{cases} \to \begin{cases} F(0) = -3 \\ F(3) = 105 \\ F(9) = -3 \\ F(10) = 7 \end{cases}$$

Se produce un máximo el tercer año con un beneficio de 105000 € y un mínimo al principio y a los 9 años con pérdidas de 3000 €.
Crece los 3 primeros años, decrece del tercero al noveno y vuelve a crecer hasta el décimo.
El último año del estudio la empresa tiene unos beneficios de 7000 €.

8. U.I.B. 2017. Considera la función $\mathbf{f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & si\ -1 \leq x < 1 \\ (x+a)^2 & si\ x \geq 1 \end{cases}}$. Se pregunta:

a. Para que valores de a la función es continua en x = 1

b. Para el valor de a que hace continua la función en todo su dominio, calcula las derivadas de f en los puntos x = 0 y x = 3. ¿Cómo es el crecimiento y decrecimiento de la función en estos puntos?

VER VIDEO https://youtu.be/sbs1dmJ0Pa0
VER VIDEO https://youtu.be/2hHW2D930CQ

a. Continuidad en x = 1

$$\left.\begin{cases} f(1) = (1+a)^2 \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} e^{x-1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} (x+a)^2 = (1+a)^2 \end{cases} \end{cases}\right\} \overbrace{(1+a)^2 = 1}^{f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)} \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases}$$

b.

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x-1} & si\ -1 < x < 1 \\ 2(x+a) & si\ x > 1 \end{cases} \begin{cases} f'(0) = e^{-1} > 0, \text{creciente.} \\ f'(3) = \begin{cases} 2(3+0) = 6 > 0, \text{creciente.} \\ 2(3-2) = 2 > 0, \text{creciente.} \end{cases} \end{cases}$$

9. U.I.B. 2017. Un estudio acerca de la presencia de CO_2 en la atmosfera de una ciudad indica el nivel de contaminación viene dado por la función: $C(t) = -0.2t^2 + 4t + 25$, $0 \le t \le 25$. Siendo t los años transcurridos desde el año 2000. Se pregunta:

a. ¿En qué año se alcanzará un máximo en el nivel de contaminación?

b. ¿En qué año se alcanzará el nivel de contaminación cero?

c. ¿Cuándo t = 17 el nivel de contaminación será creciente o decreciente?

VER VIDEO https://youtu.be/0n5LB7Wv-4I

a.

$$C' = -0{,}4t + 4 = 0 \rightarrow t = 10 \rightarrow \begin{cases} C(0) = 25 \\ C(10) = 55 \rightarrow t = 10, \text{año } 2010 \\ C(25) = 0 \end{cases}$$

b.

$$-0.2\, t^2 + 4\, t + 25 = 0 \begin{cases} t = -5 \text{ NO} \\ t = 25 \text{ , año } 2025 \end{cases}$$

c. $C'(17) = -2{,}8 < 0$, decreciente.

10. U.I.B. 2017. En una cierta población el consumo de agua (en m^3) en función de las horas del día, viene dado por

$$C(t) = \begin{cases} \frac{17}{9} \cdot t & \text{si } 0 \le t < 9 \\ at^2 + bt - 172 & \text{si } 9 \le t < 20 \\ 168 - 7t & \text{si } 20 \le t < 24 \end{cases}$$

Sabiendo que la función es continua en el intervalo (0,20), y que a las 15 horas se consigue el máximo consumo de agua, determina a y b.

VER VIDEO https://youtu.be/-ucx-mhOS0g

Continua en t = 9

$$\begin{cases} C(9) = 81a + 9b - 172 \\ \lim_{t \to 9} C(t) = \begin{cases} \lim_{t \to 9^-} \frac{17}{9} t = 17 \\ \lim_{t \to 9^+} at^2 + bt - 172 = 81a + 9b - 172 \end{cases} \end{cases} \rightarrow 81a + 9b - 172 = 17$$

A las 15h. se consigue el máximo consumo. $C'(15) = 0 \rightarrow 2a15 + b = 0 \rightarrow b = -30a$

$$\begin{cases} 81a + 9b - 172 = 17 \\ b = -30a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 30 \end{cases}$$

11. U.I.B. 2016. Consideramos la función $f(x) = e^{x-3} - x - 2$, para $x \ge 0$. Calcula sus extremos relativos dando los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Y deducir que sí $x \ge 4$ entonces $f(x) \ge -4$.

VER VIDEO https://youtu.be/YytKmWY8saw

$f'(x) = e^{x-3} - 1 = 0 \rightarrow e^{x-3} = 1 \rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

$-\infty$ $f'(2) < 0$ DECRECE	3 MÍNIMO	$F'(4) > 0$ CRECE $+\infty$

f(4) = – 3,28 Por encima del x = 4 la función es creciente, por tanto, mayor que f(4) = – 3,28 > – 4

12. U.I.B 2016. Considera la función $f(x) = 2\cdot e^{-(x-1)} + 4x$. Calcula los máximos y mínimos relativos dando los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Y demostrar que f(x) es cóncava para todo valor de x.

VER VIDEO https://youtu.be/laWieVZUSOA

a.

$f'(x) = -2e^{-x+1} + 4 = 0 \rightarrow 2e^{-x+1} = 4 \rightarrow e^{-x+1} = 2 \rightarrow -x+1 = \ln 2 \rightarrow x = 1 - \ln 2$

- ∞ DECRECE	1 – ln2 = 0,31	CRECE + ∞
f ’(0,2)<0	MÍNIMO EN x = 1 – Ln2	f ‘(0,4)>0

b.

$f''(x) = 2e^{-x+1} > 0$ para todo x, concava.

13. U.I.B. 2016. La cotización de las acciones de una determinada sociedad anónima, suponiendo que la bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la función siguiente:
$C(x) = x^3 - 45x^2 + 243x + 30000$, siendo x el número de días. Se pregunta:

a. ¿Cuál es la cotización de partida de las acciones de la sociedad?

b. Determinar los periodos de crecimiento y decrecimiento de las cotizaciones durante este mes.

c. Determinar los días en qué se consigue cotización máxima y mínima.

VER VIDEO https://youtu.be/R0Y7rCDjLmc

a. C(0) = 30000

b. $C'(x) = 3x^2 - 90x + 243 = 0 \begin{cases} x = 3 \\ x = 27 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C(0) = 30000€ \\ C(3) = 30351€ \\ C(27) = 23439€ \\ C(30) = 23790€ \end{cases}$

Crece de 0 a 3, decrece de 3 a 27 y crece de 27 a 30.
La cotización es máxima para x = 3 y vale 30351€ y es mínima para x = 27 y vale 23439€.

14. U.I.B. 2016. Considerar la función $f(x) = (x^2 + a)e^{ax}$, siendo a un parámetro real.

a. Razonar y determinar cual es el dominio de la función f(x).

b. Determinar el valor de a para que la gráfica de la función f(x) pase por el punto (0,4).

c. Para a = −2 determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x). ¿Existen máximos y mínimos relativos de f(x)? En caso afirmativo, decir donde se consiguen y sus valores.

VER VIDEO https://youtu.be/MLxoxCZP3PE

a. La función no tiene x en el denominador, ni raíces de índice par, ni logaritmos. Su dominio es R.

b. $f(0) = 4 \rightarrow a = 4$

c. $f(x) = (x^2 - 2)\cdot e^{-2x}$;

$f'(x) = 2x\cdot e^{-2x} + (x^2 - 2)\cdot(-2)\cdot e^{-2x} = e^{-2x}\cdot(-2x^2 + 2x + 4) = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$

$-\infty$ DECRECE	-1	CRECE	2	DECRECE $+\infty$
f '(- 2) < 0	MÍN.	f '(- 0,5) > 0	MÁX.	f '(3) < 0

15. U.I.B. 2016. El beneficio neto en miles de euros obtenido por la venta de x unidades de un artículo viene dado por la función B(x) = $-x^2 + 9x-16$.

a. ¿Cuál es la función que determina el beneficio neto unitario?

b. Calcula el número de unidades del artículo que se han de vender para obtener un beneficio neto, por unidad, máximo.

c. Determina este beneficio neto máximo, por unidad.

VER VIDEO https://youtu.be/UT7QwB2yGmg

a.

$$\frac{B(x)}{x} = \overline{B}(x) = -x + 9 - \frac{16}{x}$$

b.

$$\overline{B}\,'(x) = -1 + \frac{16}{x^2} = 0 \rightarrow x = 4$$

$\overline{B}\,'(3{,}9) > 0$ CRECE	4 MÁXIMO	$\overline{B}\,'(4{,}1) < 0$ DECRECE

c. $\overline{B}(4) = 1 \rightarrow 1000$ €

16. U.I.B. 2015. El nº de individuos, en millones, de una población, viene dado por la función:

$$\mathbf{P(t) = \frac{15 + t^2}{(t+1)^2}}$$

donde t se mide en años transcurridos desde t = 0. Calcular:

a. La población inicial y la población al cabo de 3 años.

b. El año en que se conseguirá la mínima población. ¿Cuál será dicha población?

c. ¿Cuál será el tamaño de la población a largo término?

VER VIDEO https://youtu.be/Xr5SJOJk1TI

$$P(0) = \frac{15}{(0+1)^2} = 15 \rightarrow 15000000$$

$$P(3) = \frac{15+9}{(3+1)^2} = 1{,}5 \rightarrow 1500000$$

$$P'(t) = \frac{2t \cdot (t+1)^2 - (15+t^2) \cdot 2 \cdot (t+1)}{(t+1)^4} = \frac{2t \cdot (t+1) - (15+t^2) \cdot 2}{(t+1)^3} =$$

$$= \frac{2t^2 + 2t - 30 - 2t^2}{(t+1)^3} = \frac{2t-30}{(t+1)^3} = 0 \rightarrow 2t - 30 = 0 \rightarrow t = 15$$

P'(14) < 0 Decrece	15	P'(16) > 0 Crece.

Se confirma un mínimo.

$$P(15) = \frac{15+15^2}{(15+1)^2} = 0{,}9375 \rightarrow 937500$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{15+t^2}{(t+1)^2}=\frac{\infty}{\infty}(\text{ind.})=1\to 1000000$$

La población se estabiliza cerca del millón.

17. U.I.B. 2015. Considerar la siguiente f(x). Se pregunta:

$$\mathbf{f(x)=\frac{-4x}{1+x^2}}$$

a. Calcula la derivada de dicha función

b. Resuelve la ecuación f′(x) = 0

c. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

d. Determina los máximos y mínimos de la función.

e. Calcula f″(x) y resuelve la ecuación f″(x) = 0. Razona si existe o no un punto de inflexión.

VER VIDEO https://youtu.be/IO17YD8CYjw

$$a.\ f'(x)=\frac{-4\cdot(1+x^2)+4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{-4-4x^2+8x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{4x^2-4}{(1+x^2)^2}$$

$$b.\ \frac{4x^2-4}{(1+x^2)^2}=0\to 4x^2-4=0\to x=\pm 1$$

c. Estudiamos el dominio y el signo de la derivada.

$1+x^2=0$, no existe solución real.

d.

f'(-2) > 0 Crece ↗	−1	f'(0) < 0 Decrece ↘	1	f'(2) > 0 Crece ↗

En (−1, 2) hay un máximo. En (1, −2) hay un mínimo.

e.

$$f''(x)=\frac{8x\cdot(1+x^2)^2-(4x^2-4)\cdot 2x\cdot(1+x^2)}{(1+x^2)^4}=\frac{8x\cdot(1+x^2)-(4x^2-4)\cdot 2x}{(1+x^2)^3}=$$

$$\frac{8x+8x^3-8x^3+8x}{(1+x^2)^3}=\frac{16x}{(1+x^2)^3}=0\to x=0$$

Estudio del signo de la segunda derivada:

f''(−1) < 0 Convexa ∩	0	f''(1) > 0 Concava U

Existe un punto de inflexión en (0, 0).

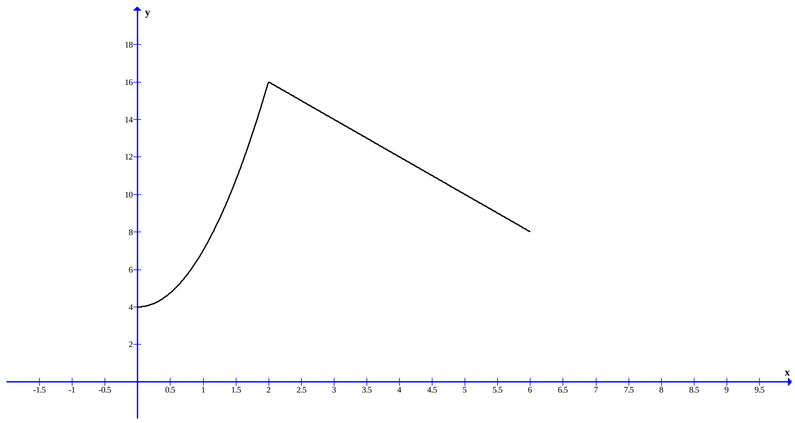
18. U.I.B. 2015. El precio de un artículo que ha estado los últimos seis años en el mercado, en función del tiempo en años, ha seguido la siguiente función $\mathbf{f(x)=\begin{cases}3t^2+4 & si\ 0\le t\le 2\\ -2t+20 & si\ 2<t\le 6\end{cases}}$.

a. Representar la función precio en los últimos seis años. ¿Es continua esta función?, ¿Es derivable?

b. Estudiar cuándo ha sido creciente y cuándo decreciente el precio del artículo.

c. ¿Cuál fue el precio máximo que consiguió el articulo? ¿Y el precio actual?

VER VIDEO https://youtu.be/PMsDNGmUmCM



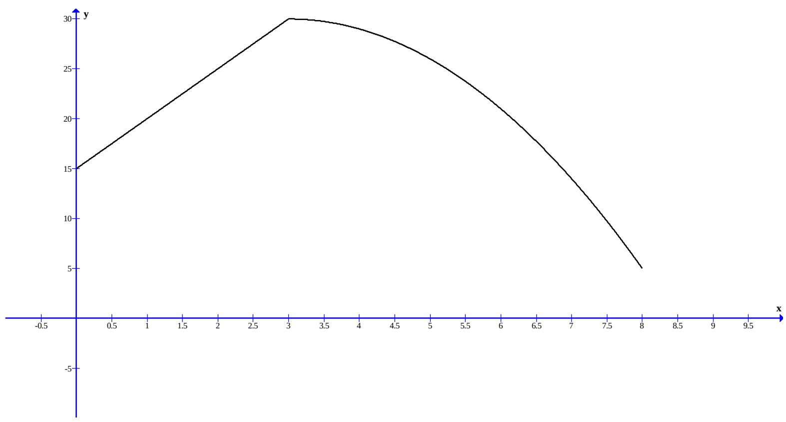
Según la gráfica, la función es continua. No es derivable en x = 2 pues presenta un punto anguloso (pico).
Crece en (0, 2).
Decrece en (2, 6).
El precio máximo es a los 2 días y es de 16 €.
El precio actual es de 8 €.

19. U.I.B. 2015. Los beneficios (en miles de euros) por la venta de un producto en función de la inversión realizada en promoción (en miles de euros), viene dada por

$$\mathbf{B(x)} = \begin{cases} \mathbf{5x + 15,} & \mathbf{si\ 0 \le x \le 3} \\ \mathbf{-(x-3)^2 + 30} & \mathbf{si\ 3 < x \le 8} \end{cases}$$

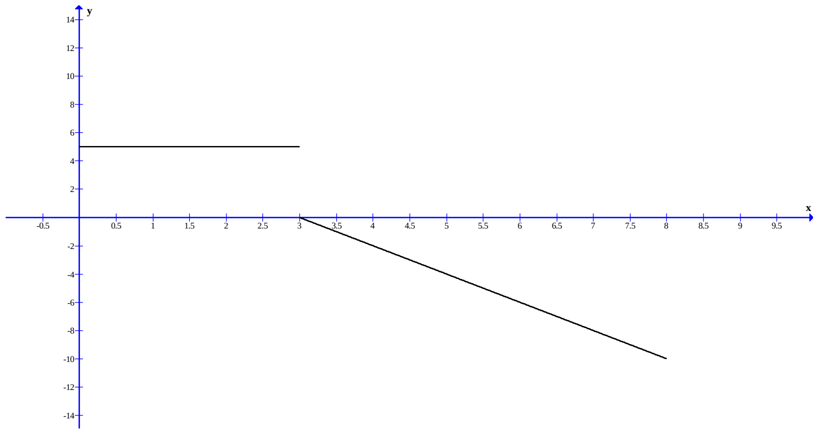
- **a. ¿Es continua esta función, es derivable? Representala gráficamente.**
- **b. ¿Cuándo crece y cuando decrece la función beneficio?**
- **c. ¿Cuándo se obtienen los beneficios mínimo y máximo?**
- **d. Representa la función derivada.**

VER VIDEO https://youtu.be/nRVqZ9Mn0dM



Observamos que es continua. No es derivable en x = 3 pues tiene un punto anguloso (pico).
Crece en (0, 3) y decrece en (3, 8).
El máximo beneficio es de 30000 € y se obtiene al invertir en promoción 3000 €.
El mínimo beneficio es de 5000 € y se obtiene al invertir en promoción 8000 €

$$B' = \begin{cases} 5, & \text{si } 0 < x < 3 \\ -2(x-3), & \text{si } 3 < x < 8 \end{cases}$$



20. Estudia y representa la función f(x).

$$\mathbf{f(x)=\frac{x}{e^x}}$$

1.- Dominio: R

2.- Cortes con eje X. Hacemos y =0. $\frac{x}{e^x}=0, x=0.$

●Signo de la función: situamos sobre la recta los valores excluidos del dominio y los cortes con en eje X.

$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) < 0$		$f(x) > 0$

3.- Cortes con el eje Y. Hacemos x = 0. y = 0/1 = 0

El punto de corte con los ejes es el (0, 0).

4.- Simetrías.

Como $f(-x)=\frac{-x}{e^{-x}}$ y es distinta de $f(x)$ y de $-f(x)$, la función no presenta simetría.

5.- Asíntotas:

●Verticales: no tiene pues el dominio es R.

●Horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}(\text{ind.})=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0\to \text{El eje X es asintota horizontal.}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{-\infty}{0}=-\infty$$

6.- Monotonía: $\begin{cases}\text{crecimiento}\\ \text{decrecimiento}\\ \text{máximos}\\ \text{mínimos}\end{cases}$

$$f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2}=\frac{(1-x)}{e^x}=0\ \to x=1.$$

●Signo de la derivada: situamos sobre la recta los valores excluidos del dominio y los valores que anulan a la derivada.

$-\infty$ creciente	1	decreciente $+\infty$
f'(x) > 0		f'(x) < 0

En el punto $\left(1,\frac{1}{e}\right)$ hay un máximo.

7.- Curvatura: $\begin{cases} \text{concava} \\ \text{convexa} \\ \text{puntos de inflexión} \end{cases}$

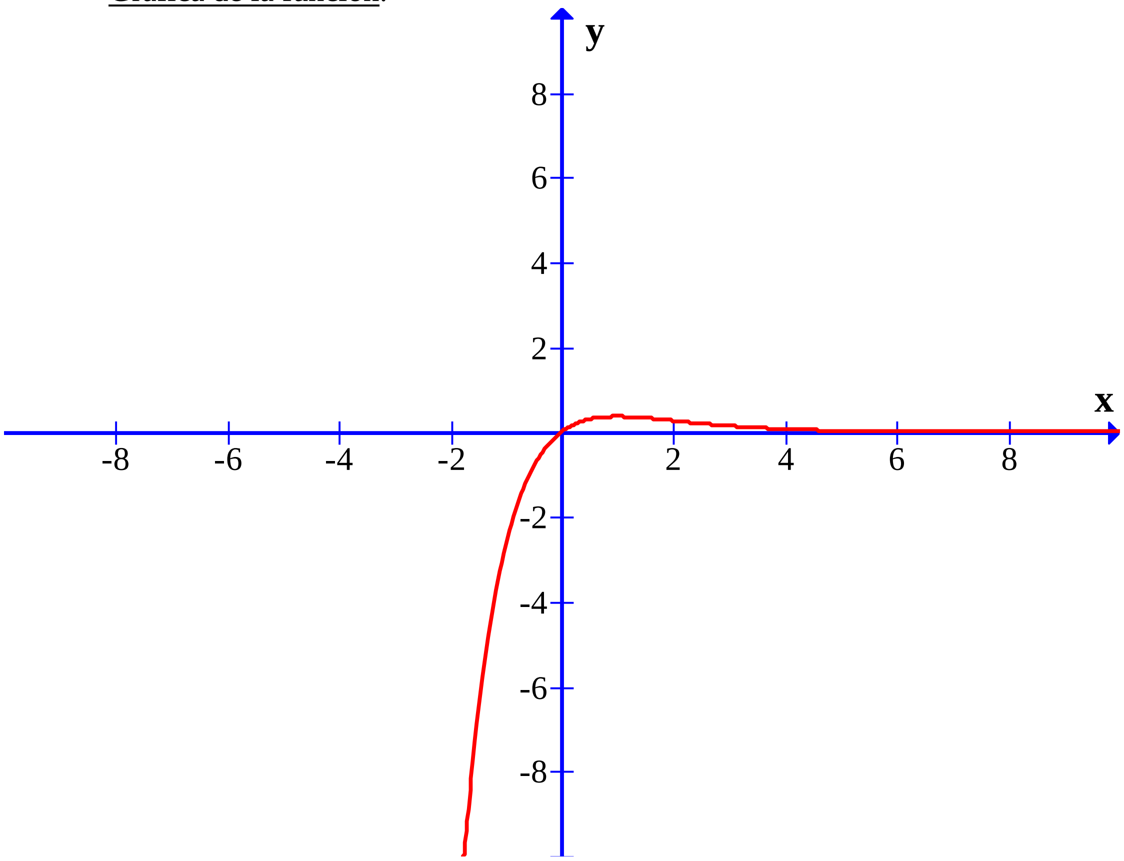
●Signo de la segunda derivada. Tomamos los puntos excluidos del dominio y los valores que anulan a la segunda derivada.

$$f''(x) = \frac{e^x - (x-1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(2-x)}{(e^x)^2} = \frac{(2-x)}{e^x} = 0 \ \rightarrow x = 2.$$

$-\infty$ cóncava ∪	2	convexa ∩ $+\infty$
$f''(x) > 0$		$f''(x) < 0$

En el punto $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$ hay una inflexión.

●Gráfica de la función.



21. Estudia y representa la siguiente función.

$$\mathbf{y = \frac{e^x}{x}}$$

1.- Dominio: R - {0}

2.- Cortes con eje X. Hacemos y =0. $\frac{e^x}{x} = 0, e^x = 0 \rightarrow$ no tiene solución.

●Signo de la función: situamos sobre la recta los valores excluidos del dominio y los cortes con en eje X.

$-\infty$	0	$+\infty$
f(x) < 0		f(x) > 0

3.- Cortes con el eje Y. No corta pues el 0 no pertenece al dominio.

4.- Simetrías.

Como $f(-x) = \frac{e^{-x}}{-x}$ y es distinta de f(x) y de $-$ f(x), la función no presenta simetría.

5.- Asíntotas:

●Verticales:

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0} \rightarrow$ El eje Y es asintota vertical.

●Horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{\infty}{\infty}(\text{ind.}) = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{0}{-\infty} = 0 \rightarrow$ el eje X es asintota horizontal.

6.- Monotonía: $\begin{cases} \text{crecimiento} \\ \text{decrecimiento} \\ \text{máximos} \\ \text{mínimos} \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} e^x = 0 \rightarrow \text{no tiene solución} \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}.$$

●Signo de la derivada: situamos sobre la recta los valores excluidos del dominio y los valores que anulan a la derivada.

$-\infty$ decrece	0	decrece	1	crece $+\infty$
f'(x)<0		f'(x)<0		f'(x)>0

En el punto (1, e) hay un mínimo.

7.- Curvatura: $\begin{cases} \text{concava} \\ \text{convexa} \\ \text{puntos de inflexión} \end{cases}$

$$f''(x) = \frac{[e^x(x-1) + e^x]x^2 - 2xe^x(x-1)}{x^4} = \frac{[e^x(x-1) + e^x]x - 2e^x(x-1)}{x^3} =$$

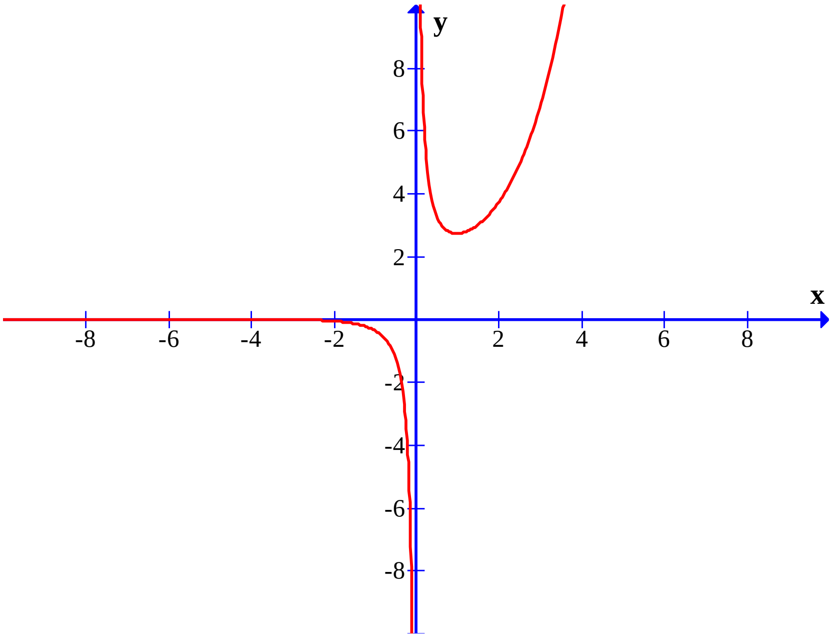
$$= \frac{(x^2 - 2x + 2)e^x}{x^3} = 0 \rightarrow \begin{cases} e^x = 0 \rightarrow \text{no tiene solución} \\ x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow \text{no tiene solución real} \end{cases}$$

●Signo de la segunda derivada. Tomamos los puntos excluidos del dominio y los valores que anulan a la segunda derivada.

$-\infty$ convexa ∩	0	cóncava ∪ $+\infty$

f''(x) < 0 f''(x) > 0

●<u>Gráfica de la función</u>.



22. Estudia y representa la función f(x).

$$\mathbf{y = \frac{x+1}{L(x+1)}}$$

1.- Dominio: $\begin{cases} x+1 > 0 \to x > -1 \\ L(x+1) \neq 0 \to x+1 \neq e^0 \to x \neq 0. \end{cases} \to$ D = (- 1, +∞) $-$ {0}

2.- Cortes con eje X. Hacemos y =0.

$\frac{x+1}{L(x+1)} = 0, x+1 = 0 \to x = -1$ no pertenece al dominio. No corta al eje X.

●Signo de la función: situamos sobre la recta los valores excluidos del dominio y los cortes con en eje X.

-1	0	+∞
f(x) < 0		f(x) > 0

3.- Cortes con el eje Y. No corta pues el 0 no pertenece al dominio.

4.- Simetrías. El dominio no es simétrico, por tanto, la función no presenta simetría.

5.- Asíntotas:

●Verticales:

$\lim_{x\to-1} \frac{x+1}{L(x+1)} = \frac{0}{\ln 0} = 0 \to$ La función empieza en el punto abierto $(-1, 0)$.

$\lim_{x\to0} \frac{x+1}{L(x+1)} = \frac{1}{0} \to$ El eje Y es asintota vertical.

●Horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{L(x+1)} = \frac{\infty}{\infty}(\text{ind.}) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to\infty} x+1 = +\infty$$

●Oblicuas: $y = mx + n \begin{cases} m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \\ n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx \end{cases}$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x+1}{L(x+1)}}{x} = \frac{\infty}{\infty}(\text{ind.}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x.\,L(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\infty}{\infty}(\text{ind.}) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{L(x+1) + \frac{x}{x+1}} = \frac{1}{\infty} = 0 \to \text{no tiene asíntota oblicua.}$$

6.- Monotonía: $\begin{cases} \text{crecimiento} \\ \text{decrecimiento} \\ \text{máximos} \\ \text{mínimos} \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{L(x+1) - 1}{\left(L(x+1)\right)^2} = 0 \to L(x+1) - 1 = 0 \to L(x+1) = 1 \to x+1 = e \to$$

$\to x = e - 1.$

●Signo de la derivada: situamos sobre la recta los valores excluidos del dominio y los valores que anulan a la derivada.

−1 decrece	0	decrece	e - 1	crece +∞
f'(x)<0		f'(x)<0		f'(x)>0

En el punto $(e - 1, e)$ hay un mínimo.

7.- Curvatura: $\begin{cases} \text{concava} \\ \text{convexa} \\ \text{puntos de inflexión} \end{cases}$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x+1}.\left(L(x+1)\right)^2 - 2(L(x+1)\frac{1}{x+1}.(L(x+1)-1)}{\left(L(x+1)\right)^4} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x+1}.\left(L(x+1)\right) \quad - 2\frac{1}{x+1}.(L(x+1)-1)}{\left(L(x+1)\right)^3} = \frac{\frac{1}{x+1}(-L(x+1)+2)}{\left(L(x+1)\right)^3} =$$

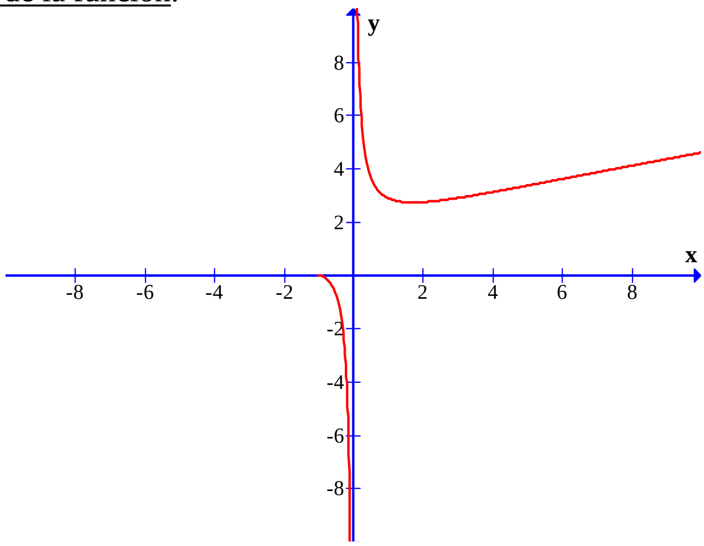
$$= \frac{(-L(x+1)+2)}{(x+1).\left(L(x+1)\right)^3} = 0 \to (-L(x+1)+2) = 0 \to L(x+1) = 2 \to x = e^2 - 1.$$

●Signo de la segunda derivada. Tomamos los puntos excluidos del dominio y los valores que anulan a la segunda derivada.

-1	convexa ∩	0	cóncava ∪	e^2 - 1	convexa ∩	$+\infty$
	f''(x) < 0		f''(x) > 0		f''(x) < 0	

El punto $\left(e^2 - 1, \frac{e^2}{2}\right)$ es un punto de inflexión.

●Gráfica de la función.



23. Estudia y representa la función f(x).

$$\mathbf{f(x) = \frac{L(x+1)}{x+1}}$$

1.- Dominio: $\begin{cases} x+1 > 0 \to x > -1 \\ x+1 \neq 0 \to x \neq -1 \end{cases} \to$ D = (- 1, +∞)

2.- Cortes con eje X. Hacemos y =0.

$\dfrac{L(x+1)}{x+1} = 0, L(x+1) = 0 \to x+1 = e^0 , x = 0.$ Corta en el punto $(0, 0)$.

●Signo de la función: situamos sobre la recta los valores excluidos del dominio y los cortes con en eje X.

-1	0	+∞
f(x) < 0		f(x) > 0

3.- Cortes con el eje Y. Hacemos x = 0. y = 0.

4.- Simetrías. El dominio no es simétrico, por tanto, la función no presenta simetría.

5.- Asíntotas:

●Verticales:

$\lim_{x\to -1} \dfrac{L(x+1)}{x+1} = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty.$ Tiene asíntota vertical $x = -1$.

●Horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{L(x+1)}{x+1} = \frac{\infty}{\infty}(\text{ind.}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

El eje X es asíntota horizontal.

6.- Monotonía: $\begin{cases} \text{crecimiento} \\ \text{decrecimiento} \\ \text{máximos} \\ \text{mínimos} \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{1 - L(x+1)}{(x+1)^2} = 0 \to 1 - L(x+1) = 0 \to L(x+1) = 1 \to x+1 = e \to$$
$$\to x = e - 1.$$

●Signo de la derivada: situamos sobre la recta los valores excluidos del dominio y los valores que anulan a la derivada.

-1 creciente	e - 1	Decreciente +∞
f'(x) > 0		f'(x) < 0

En el punto $\left(e - 1, \frac{1}{e}\right)$ hay un máximo.

7.- Curvatura: $\begin{cases} \text{concava} \\ \text{convexa} \\ \text{puntos de inflexión} \end{cases}$

$$f''(x) = \frac{\frac{-1}{x+1}.(x+1)^2 - 2(x+1).[1 - L(x+1)]}{(x+1)^4} = \frac{(x+1).[-3 + L(x+1)]}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{-3 + L(x+1)}{(x+1)^2} 0 \to -3 + L(x+1) = 0 \to L(x+1) = 3 \to x = e^3 - 1.$$

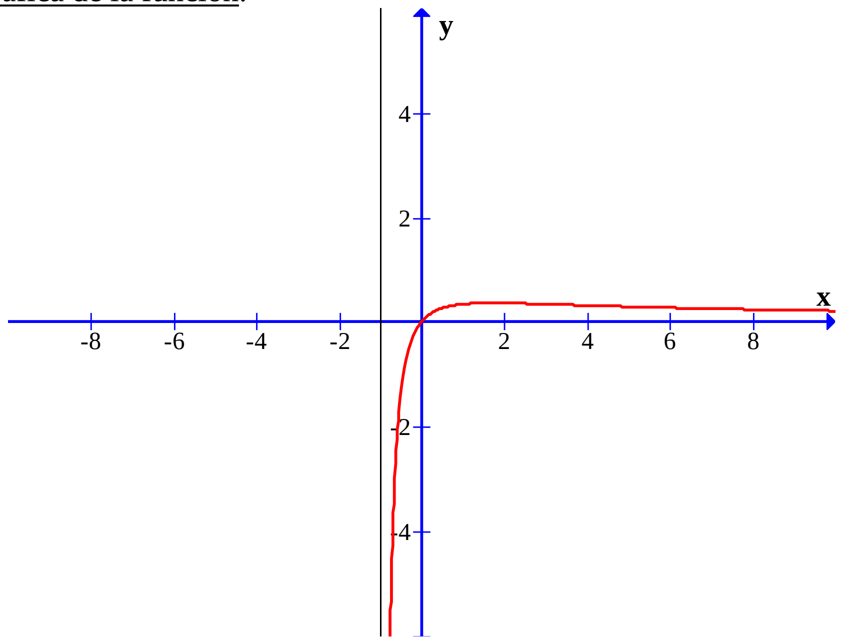
●Signo de la segunda derivada. Tomamos los puntos excluidos del dominio y los valores que anulan a la segunda derivada.

-1 convexa ∩	e^3 - 1	cóncava ∪ +∞

f''(x) < 0 f''(x) > 0

El punto $\left(e^3 - 1, \frac{3}{e^3}\right)$ es un punto de inflexión.

●Gráfica de la función.



24. Estudia y representa la función f(x).

$$\mathbf{f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}}$$

1.- Dominio: R −{1}

2.- Cortes con eje X. Hacemos y =0:

$$\frac{x}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

●Signo de la función: situamos sobre la recta los valores excluidos del dominio y los cortes con en eje X.

$-\infty$	0		1	$+\infty$
f(x) < 0		f(x) > 0		f(x) > 0

3.- Cortes con el eje Y. Hacemos x = 0. y = 0/1 = 0

El punto de corte con los ejes es el (0, 0).

4.- Simetrías. Si el dominio no es simétrico la función no es simétrica.

5.- Asíntotas:

●Verticales: $\lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0} \rightarrow$ En $x = 1$ hay una asintota vertical.

●Horizontales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{\infty}{\infty}(\text{ind.}) = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{-\infty}{\infty}(\text{ind.}) = 0 \end{array}\right\} \text{La recta } y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

6.- Monotonía: $\begin{cases} \text{crecimiento} \\ \text{decrecimiento} \\ \text{máximos} \\ \text{mínimos} \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 - 2(x-1)x}{(x-1)^4} = \frac{(x-1) - 2x}{(x-1)^3} = \frac{-x-1}{(x-1)^3} = 0 \rightarrow x = -1.$$

●Signo de la derivada: situamos sobre la recta los valores excluidos del dominio y los valores que anulan a la derivada.

$-\infty$ decrece	-1	crece	1	decrece $+\infty$
f'(x) < 0		f'(x) > 0		f'(x) < 0

En el punto $\left(-1, \frac{-1}{4}\right)$ hay un mínimo.

7.- Curvatura: $\begin{cases} \text{concava} \\ \text{convexa} \\ \text{puntos de inflexión} \end{cases}$

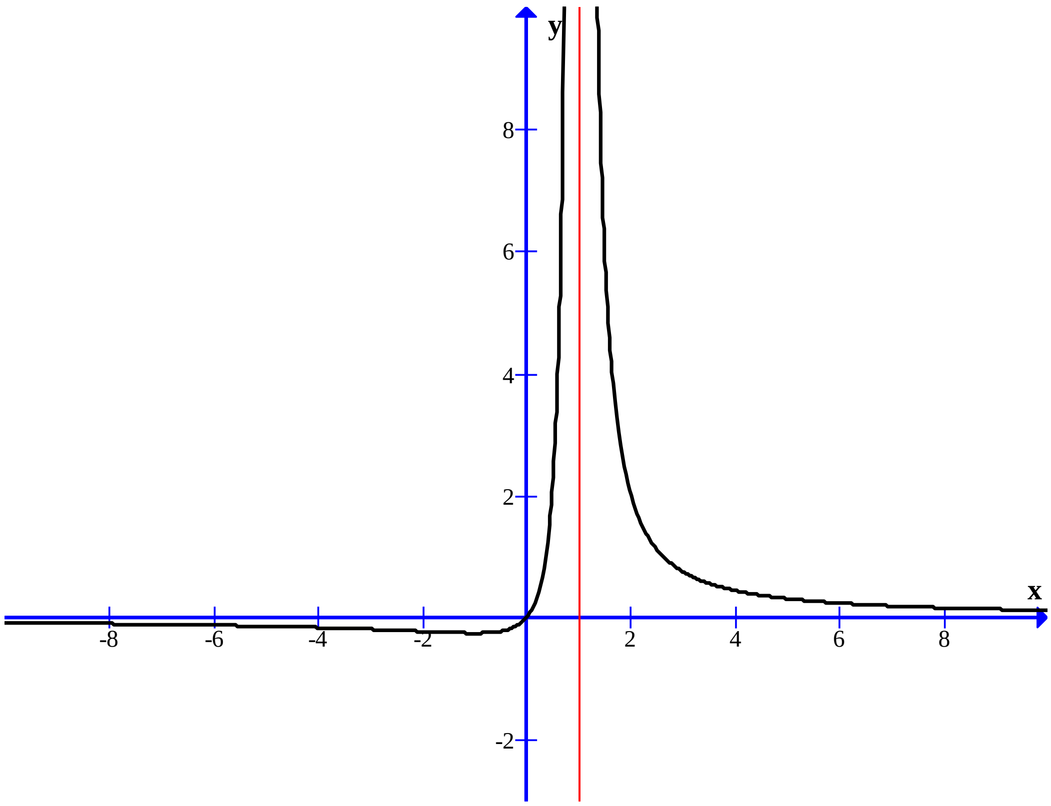
$$f''(x) = \frac{-(x-1)^3 - 3(x-1)^2(-x-1)}{(x-1)^6} = \frac{-(x-1) - 3(-x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x+4}{(x-1)^4} = 0$$

$$\rightarrow x = -2$$

●Signo de la segunda derivada. Tomamos los puntos excluidos del dominio y los valores que anulan a la segunda derivada.

$-\infty$ convexa ∩	−2	cóncava ∪	1	cóncava ∪ $+\infty$
f''(x) < 0		f''(x) > 0		f''(x) > 0

En el punto $\left(-2, \frac{-2}{9}\right)$ hay un punto de inflexión.



25. Estudia y representa la función siguiente. $y = x.e^x$

1.- Dominio: R

2.- Cortes con eje X. Hacemos y =0:

$$x.e^x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^x = 0 \rightarrow \text{no tiene solución.} \end{cases}$$

●Signo de la función: situamos sobre la recta los valores excluidos del dominio y los cortes con en eje X.

$-\infty$	0	$+\infty$
f(x) < 0		f(x) > 0

3.- Cortes con el eje Y. Hacemos x = 0. y = 0

4.- Simetrías.

Como $f(-x) = -xe^{-x}$ y es distinta de $f(x)$ y de $-f(x)$, la función no presenta simetría.

5.- Asíntotas:

●Verticales: no tiene pues dom = R

●Horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} x.e^x = \infty.\infty = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x.e^x = -\infty.0(\text{ind.}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty}(\text{ind.}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

El eje X es asíntota horizontal en el $-\infty$.

6.- Monotonía: $\begin{cases} \text{crecimiento} \\ \text{decrecimiento} \\ \text{máximos} \\ \text{mínimos} \end{cases}$

$f'(x) = e^x + x.e^x = e^x.(x+1) = 0 \rightarrow x = -1$

●Signo de la derivada: situamos sobre la recta los valores excluidos del dominio y los valores que anulan a la derivada.

$-\infty$ decrece	- 1	crece $+\infty$
f'(x) < 0		f'(x) > 0

Tiene un mínimo en $(-1, -e^{-1})$

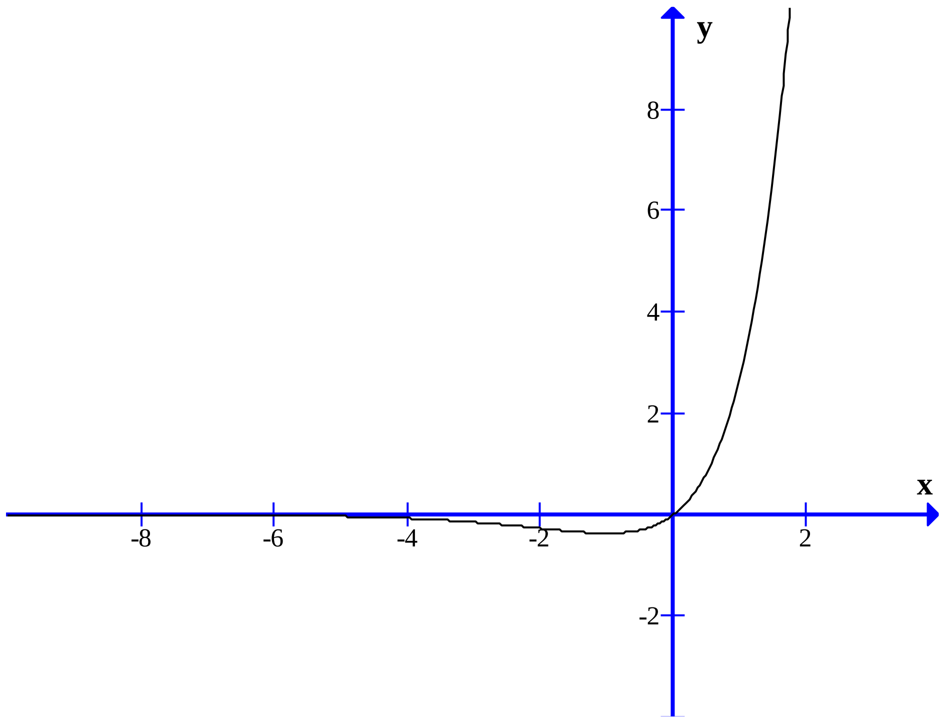
7.- Curvatura: $\begin{cases} \text{concava} \\ \text{convexa} \\ \text{puntos de inflexión} \end{cases}$

$f''(x) = e^x.(x+1) + e^x = e^x.(x+2) = 0 \rightarrow x = -2.$

●Signo de la segunda derivada. Tomamos los puntos excluidos del dominio y los valores que anulan a la segunda derivada.

$-\infty$ convexa ∩	- 2	concava ∪ $+\infty$
f'' (x) < 0		f'' (x) > 0

Tiene un punto de inflexión en $(-2, -2.e^{-2})$



26. Dada la función.

$$\mathbf{f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}.$$

a) Calcula las asíntotas de la función.

b) Calcula los extremos de la función.

a) El dominio es R.

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=1\to \text{tiene una asíntota horizontal en } y=1$$

No tiene asíntotas oblicuas.

b)

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+1)-2x(x^2+x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x+x^2+1-2x^3-2x^2-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0\to\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}$$

$-\infty$	Decrece	- 1	crece	1	decrece	$+\infty$
	f’(- 2) < 0		f’(0) > 0		f’(2) < 0	

La función tiene un mínimo en $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

La función tiene un máximo en $\left(1,\frac{3}{2}\right)$

27. Determina los máximos y mínimos de la función:

$$\mathbf{f(x)=\frac{1+x}{1+x+x^2}}$$

El dominio de f(x) = R

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x}{(1+x+x^2)^2}=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=2\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada:

$-\infty$ decrece	-2	crece	0	decrece $+\infty$
f'(-3) < 0		f'(- 1) > 0		f'(1) < 0

$$\text{En el punto }\left(-2,\frac{-1}{3}\right)\text{tenemos un mínimo, y en }(0,1)\text{un máximo.}$$

28. Dada la función f(x):

$$\mathbf{f(x)=\frac{e^{kx}}{1+x^2}}$$

a) Determinar el valor de k para que la pendiente de la recta tangente a la función a x = 0 tome el valor 3.

b) Dado el valor de k calculado en el apartado a), estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

$$\text{a)}\ \ m=f'(0)=3\rightarrow f'(x)=\frac{ke^{kx}(1+x^2)-2xe^{kx}}{(1+x^2)^2}=\frac{e^{kx}(k-2x+kx^2)}{(1+x^2)^2}\rightarrow$$
$$\rightarrow f'(0)=k=3.$$

$$\text{b) } f(x)=\frac{e^{3x}}{1+x^2}\rightarrow f'(x)=\frac{e^{3x}(3-2x+3x^2)}{(1+x^2)^2}=0\rightarrow e^{3x}(3-2x+3x^2)=0\rightarrow$$
$$\rightarrow\begin{cases}e^{3x}=0,\nexists\text{ solución}\\ 3-2x+3x^2=0,\nexists\text{ solución}\end{cases}.\,f'(x)>0\rightarrow f(x)\text{es creciente en R.}$$

29. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos, los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de la función: f(x) = (x – 3)^4.(x – 1)

Al ser una función polinómica el dominio es R.

f'(x) = 4(x – 3)^3.(x – 1) + (x – 3)^4 = (x – 3)^3. (5x – 7) = 0 → $\begin{cases}x=3\\ x=\frac{7}{5}\end{cases}$.

$-\infty$ crece	$\frac{7}{5}$	decrece	3	crece $+\infty$
f'(x) > 0	Máximo	f'(x)< 0	Mínimo	f'(x) > 0

$$\text{Máximo }\left(\frac{7}{5},\frac{8192}{3125}\right);\text{mínimo }(3,0)$$

f''(x) = 3(x – 3)^2.(5x – 7) + 5(x – 3)^3 = (x – 3)^2 (20x – 36) = 0 → $\begin{cases}x=3\\ x=\frac{9}{5}\end{cases}$

$-\infty$ convexa ∩	$\frac{9}{5}$	Cóncava ∪	3	cóncava ∪ $+\infty$

f''(x) < 0 P.I. f''(x) > 0 f''(x) > 0

Punto de inflexión: $\left(\frac{9}{5}, \frac{5184}{3125}\right)$

30. Se considera la función f (x) = $\sqrt{1+x+x^2}$.

i) Determinar los extremos relativos.

ii) Calcular: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$; $\lim_{x\to-\infty} f'(x)$.

i) El dominio de f(x)es R.

$$f'(x) = \frac{1+2x}{2\sqrt{1+x+x^2}} = 0 \to 1+2x = 0 \to x = \frac{-1}{2}.$$

$-\infty$ decrece	$\frac{-1}{2}$	crece $+\infty$
f'(x) < 0	mínimo	f'(x) > 0

La función tiene un mínimo en $\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x+x^2} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x+x^2} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2x}{2\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{+\infty}{+\infty}(\text{ind.}) \overset{\text{numerador y denominador tienen el mismo grado}}{\cong} \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+2x}{2\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{-\infty}{+\infty}(\text{ind.}) \overset{\text{numerador y denominador tienen el mismo grado}}{\cong} \frac{-2}{2} = -1$$

31. Se considera la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

a) Calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Calcular los extremos relativos.

c) Haz un dibujo de la función.

1.- <u>Dominio</u>: R

2.- Cortes con eje X. Hacemos y $= 0 \to \frac{x}{x^2+1} = 0 \to x = 0$

• <u>Signo de la función</u>: situamos sobre la recta los valores excluidos del dominio y los cortes con en eje X.

$-\infty$	0	$+\infty$
f(x) < 0		f(x) > 0

3.- <u>Cortes con el eje Y</u>. Hacemos x = 0. y = 0/1 = 0

El punto de corte con los ejes es el (0, 0).

4.- Simetrías.

Como $f(-x) = \dfrac{-x}{x^2+1} = -f(x)$, la función presenta simetría respecto al origen.

5.- Asíntotas:

- Verticales: no tiene pues el dominio es R.
- Horizontales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{\infty}{\infty}(\text{ind.}) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{-\infty}{\infty}(\text{ind.}) = 0 \end{array}\right\} \text{La recta } y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

- Oblicuas no tiene.

6.- Monotonía: $\begin{cases} \text{crecimiento} \\ \text{decrecimiento} \\ \text{máximos} \\ \text{mínimos} \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \to -x^2+1 = 0 \to x = \pm 1.$$

- Signo de la derivada: situamos sobre la recta los valores excluidos del dominio y los valores que anulan a la derivada.

$-\infty$ decrece	-1	crece	1	decrece $+\infty$
f'(x) < 0		f'(x) > 0		f'(x) < 0

La función tiene un máximo en (1, ½) y un mínimo en (– 1, – ½).

7.- Curvatura: $\begin{cases} \text{concava} \\ \text{convexa} \\ \text{puntos de inflexión} \end{cases}$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)2x(-x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x(x^2+1) - 2.2x(-x^2+1)}{(x^2+1)^3}$$

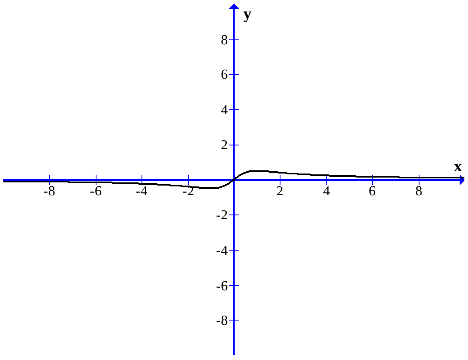
$$= \frac{-2x^3 - 2x + 4x^3 - 4x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = 0 \to 2x^3 - 6x = 0 \to x(2x^2-6) = 0 \to$$

$$\to \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 6 = 0 \to x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

- Signo de la segunda derivada. Tomamos los puntos excluidos del dominio y los valores que anulan a la segunda derivada.

$-\infty$convexa ∩	$-\sqrt{3}$	cóncava ∪	0	convexa ∩	$\sqrt{3}$	cóncava ∪ $+\infty$
f''(x) < 0		f''(x) > 0		f''(x) < 0		f''(x) > 0

En los puntos $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{-\sqrt{3}}{4}\right)$ y $\left(\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ hay puntos de inflexión.



32. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

a) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

b) Calcular los extremos relativos.

c) Representar la función.

1.- Dominio: R−{1}

$$2.-\text{ Cortes con eje X. Hacemos } y = 0 \to \frac{x^2}{x-1} = 0 \to x = 0$$

• Signo de la función: situamos sobre la recta los valores excluidos del dominio y los cortes con en eje X.

$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f(x) < 0$		$f(x) < 0$		$f(x) > 0$

3.- Cortes con el eje Y. Hacemos x = 0. y = 0/−1 = 0

El punto de corte con los ejes es el (0, 0).

4.- Simetrías.

Como el dominio no es simétrico, la función no es simetrica.

5.- Asíntotas:

$$\bullet\text{Verticales: } \lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0} \to \text{En } x = 1 \text{ hay una asintota vertical.}$$

• Horizontales: no tiene pues el grado del numerador > grado denominador.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1} = \frac{\infty}{\infty}(\text{ind.}) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1} = \frac{-\infty}{\infty}(\text{ind.}) = -\infty$$

• Oblicua: y = mx + n

$$\left.\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-x} = \frac{\infty}{\infty}(\text{ind}) = 1 \\ n &= \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1} = \frac{\infty}{\infty}(\text{ind}) = 1 \end{aligned}\right\} y = x + 1$$

$$6.-\text{ Monotonía: }\left\{\begin{array}{c}\text{crecimiento}\\ \text{decrecimiento}\\ \text{máximos}\\ \text{mínimos}\end{array}\right.$$

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\ \rightarrow x^2-2x=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}.$$

• Signo de la derivada: situamos sobre la recta los valores excluidos del dominio y los valores que anulan a la derivada.

$-\infty$ crece	0	decrece	1	decrece	2	crece $+\infty$
f'(x) > 0		f'(x) < 0		f'(x) > 0		f'(x) < 0

La función tiene un máximo en (0,0) y un mínimo en (2, 4).

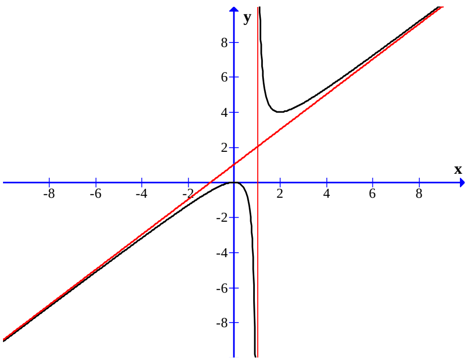
7.- Curvatura: $\begin{cases}\text{concava}\\\text{convexa}\\\text{puntos de inflexión}\end{cases}$

$$f''(x)=\frac{(2x-2).(x-1)^2-2(x-1).(x^2-2x)}{(x-1)^4}=\frac{(2x-2).(x-1)-2(x^2-2x)}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x^2+1)^3}=0\rightarrow\nexists\text{ solución.}$$

• Signo de la segunda derivada. Tomamos los puntos excluidos del dominio y los valores que anulan a la segunda derivada.

$-\infty$ convexa ∩	1	Cóncava ∪ $+\infty$
f''(x) < 0		f''(x) > 0

La función no tiene puntos de inflexión.



33. Se considera la función $y=\frac{(x+1)^2}{e^x}$ Estudiarla y representarla.

El dominio es R.

$$y'=\frac{2(x+1)e^x-e^x(x+1)^2}{(e^x)^2}=\frac{2x+2-x^2-2x-1}{e^x}=\frac{-x^2+1}{e^x}=0\rightarrow x=\pm1$$

$-\infty$ decrece	-1	crece	1	decrece $+\infty$
f'(x) < 0		f'(x) > 0		f'(x) < 0

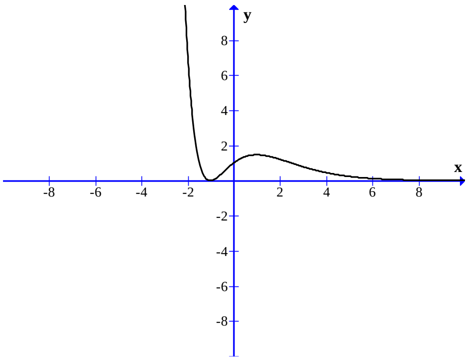
La función tiene un mínimo en (- 1, 0)

La función tiene un máximo en $\left(1, \frac{4}{e}\right)$

$$y'' = \frac{-2xe^x - e^x(-x^2+1)}{(e^x)^2} = \frac{-2x + x^2 - 1}{e^x} = 0 \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$-\infty$	cóncava $\cup$	$1-\sqrt{2}$	convexa $\cap$	$1+\sqrt{2}$	cóncava $\cup$	$+\infty$
	f''(x) > 0		f''(x) < 0		f''(x) > 0	

La función tiene un punto de inflexión en $\left(1-\sqrt{2}, 0'52\right)$ y en $\left(1+\sqrt{2}, 1'04\right)$



34. La recta y = 2x – 1 es una asíntota oblicua de la función f(x). Hallar el valor de k y, si cabe, los extremos locales.

$$\mathbf{f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + k}}$$

A. oblicua
$y = mx + n$
$$\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+kx} = 2 \\ n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{x+k} - 2x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-2kx-1}{x+k} = -2k \end{cases}$$

$$y = 2x - 1, n = -1. \rightarrow -2k = -1 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{2x^2-1}{x+\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{4x\left(x+\frac{1}{2}\right) - (2x^2-1)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2x^2+2x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} = 0 \rightarrow \nexists \text{sol. real.}$$

La función no tiene extremos locales.

35. Calcula los máximos y mínimos relativos de la función.

$$\mathbf{f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2x+3}}.$$

Dominio: $(x^2 + 2x + 3 = 0$ no tiene sol. real.$)$. D = R

$$f'(x) = \frac{2.(x^2+2x+3) - (2x+2).(2x+1)}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{-2x^2 - x + 4}{(x^2+2x+3)^2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{2} \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la función:

$-\infty$ decrece	$\frac{-1-\sqrt{33}}{2}$	crece	$\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$	Decrece $+\infty$
f'(-3) < 0		f'(0) > 0		f'(3) < 0

La función tiene un mínimo en $\left(\dfrac{-1-\sqrt{33}}{2},\right)$

36. Considerar la función real definida en toda la recta real por:

$$\mathbf{f(x) = \frac{3x^2-1}{(x^2+1)^2}}$$

a) Calcular f '(x) y f ''(x) y dar los resultados completamente simplificados.
b) Determinar los máximos y mínimos de la función f(x).

$$f'(x) = \frac{6x(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)2x(3x^2-1)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2+1)[6x.(x^2+1) - 12x^3 + 4x]}{(x^2+1)^4} = \frac{6x.(x^2+1) - 12x^3 + 4x}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{6x^3 + 6x - 12x^3 + 4x}{(x^2+1)^3} = \frac{-6x^3 + 10x}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(-18x^2+10)(x^2+1)^3 - 3(x^2+1)^2 2x(-6x^3+10x)}{(x^2+1)^6} =$$

$$= \frac{(x^2+1)^2[(-18x^2+10)(x^2+1) + 36x^4 - 60x^2]}{(x^2+1)^6} =$$

$$= \frac{(-18x^2+10)(x^2+1) + 36x^4 - 60x^2}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{-18x^4 - 18x^2 + 10x^2 + 10 + 36x^4 - 60x^2}{(x^2+1)^4} = \frac{18x^4 - 68x^2 + 10}{(x^2+1)^4}$$

Hallamos máximos y mínimos:

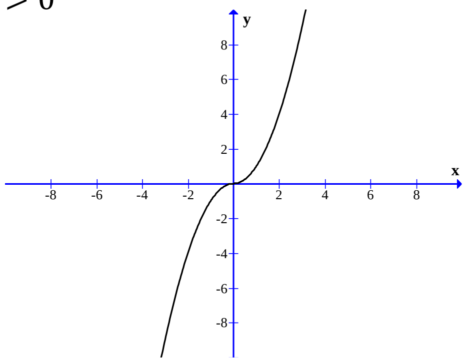
$$f'(x) = \frac{-6x^3+10x}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow -6x^3 + 10x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{\dfrac{5}{3}} \\ x = -\sqrt{\dfrac{5}{3}} \end{cases}$$

$-\infty$ crece	$-\sqrt{\frac{5}{3}}$	decrece	0	crece	$\sqrt{\frac{5}{3}}$	decrece $+\infty$
f'(x) > 0		f'(x) < 0		f'(x) > 0		f'(x) < 0

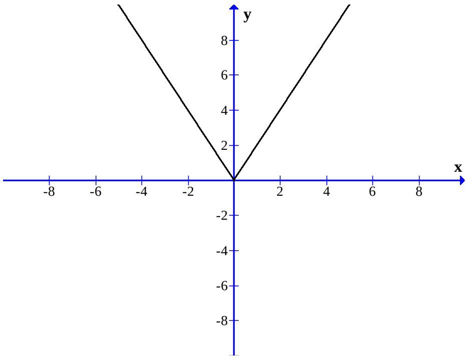
Maximós: $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}},\frac{9}{16}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\frac{9}{16};\right)$ Mínimo: $(0,-1)$

37. Se considera la función f(x) = x|x|. Calcular las ecuaciones y los dominios de las funciones f (x), f '(x), f ' '(x) i f ' ' '(x). Representarlas gráficamente.

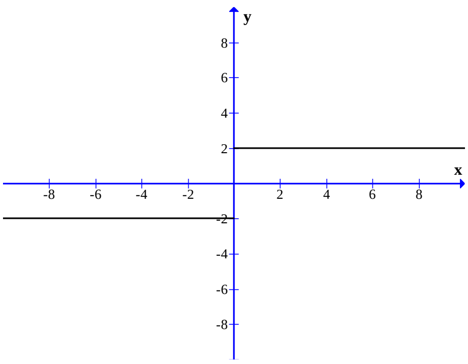
$f(x)=x|x|=\begin{cases}-x^2 & \text{si } x\le 0\\ x^2 & \text{si } x>0\end{cases}$ Dom = R, es derivable en $x=0$



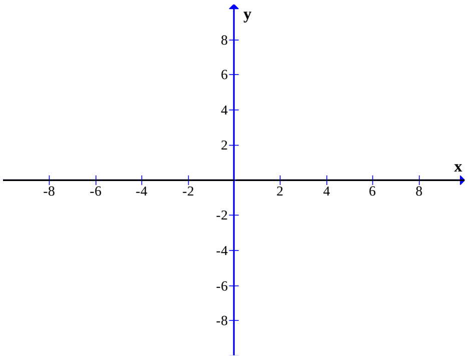
$f'(x)=\begin{cases}-2x & \text{si } x\le 0\\ 2x & \text{si } x>0\end{cases}$ Dom = R, no es derivable en $x=0$



$f''(x)=\begin{cases}-2 & \text{si } x<0\\ 2 & \text{si } x>0\end{cases}$ Dom $= R-\{0\}$ ya que $f'(x)$ no es derivableen $x=0$.
No es derivable en $x=0$



$f'''(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x>0\end{cases}$ Dom $= R-\{0\}$ ya que $f''(x)$no es derivable en $x=0$
No es derivable en $x=0$



38. La recta y = 2x – 2 es una asíntota oblicua de la función f(x). Calcular el valor de k y los extremos relativos de esta función.

$$\mathbf{f(x) = \frac{2x^2+1}{x+k}}.$$

$$\text{Asíntota oblicua: } y = mx + n \begin{cases} m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx \end{cases}$$

$$y = 2x - 2 \begin{cases} m = 2 \\ n = -2 \end{cases}$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2+1}{x+k}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+kx} = \frac{\infty}{\infty}(\text{ind}) = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x+k} - 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1-2x^2-2kx}{x+k} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-2kx}{x+k}$$
$$= \frac{\infty}{\infty}(\text{ind}) = -2k. \text{ Como } n = -2, \text{ tenemos: } -2k = -2, k = 1.$$

$$y' = \frac{4x.(x+1)-(2x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{4x^2+4x-2x^2-1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2} = 0$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{-2+\sqrt{6}}{2} \\ \dfrac{-2-\sqrt{6}}{2} \end{cases}. \text{ Tenemos un máximo en } \left(\frac{-2-\sqrt{6}}{2}, -4-2\sqrt{6}\right) \text{ y un mímimo en}$$
$$\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{2}, \frac{7\sqrt{6}-12}{6}\right)$$

39. Dadas las funciones f(x) y g(x), calcula sus dominios, sus inversas, f◦f⁻¹, g◦f y g⁻¹◦g

$$\mathbf{f(x) = \sqrt{x^2-5} \text{ y } g(x) = \frac{2x-3}{1-3x}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/chVqgujHt7E
VER VIDEO https://youtu.be/V2Cv95UKlI4

$$f(x) = \sqrt{x^2-5} \to x^2-5 \geq 0 \to x^2-5 = 0 \to \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases}$$

+	$-\sqrt{5}$	-	$\sqrt{5}$	+

Dom: $(-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},+\infty)$

$f(x)=\sqrt{x^2-5}; x=\sqrt{y^2-5}; x^2=y^2-5; y^2=x^2+5; f^{-1}(x)=\pm\sqrt{x^2+5}$

$g(x)=\dfrac{2x-3}{1-3x}; 1-3x=0; -3x=-1; x=\dfrac{1}{3}; \text{Dom}=R-\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

$g(x)=\dfrac{2x-3}{1-3x}; x=\dfrac{2y-3}{1-3y}; x\cdot(1-3y)=2y-3; x-3xy=2y-3;$

$-2y-3xy=-3-x; y\cdot(-2-3x)=-3-x; y=\dfrac{-3-x}{-2-3x}=g^{-1}(x)$

$f\circ f^{-1}=\sqrt{(f^{-1})^2-5}=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2-5}=\sqrt{x^2+5-5}=x$

$g\circ f=\dfrac{2f-3}{1-3f}=\dfrac{2\sqrt{x^2-5}-3}{1-3\sqrt{x^2-5}}$

$g^{-1}\circ g=\dfrac{-3-g}{-2-3g}=\dfrac{-3-\dfrac{2x-3}{1-3x}}{-2-3\dfrac{2x-3}{1-3x}}=\dfrac{\dfrac{-3\cdot(1-3x)-(2x-3)}{1-3x}}{\dfrac{-2\cdot(1-3x)-3\cdot(2x-3)}{1-3x}}=\dfrac{7x}{7}=x$

40. Dadas las funciones f(x) y g(x), calcula sus dominios, sus inversas, $f\circ f^{-1}$, $g\circ f$ y $g^{-1}\circ g$

$$\mathbf{f(x)=\ln(x^2)\ y\ g(x)=\dfrac{x-3}{1-2x}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/92x2ozrWt9M

VER VIDEO https://youtu.be/pSwHGTFOoCU

41. Dada la siguiente función calcula a y b para que sea continua y represéntala para esos valores de a y b.

$$\mathbf{f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & si\ x<-1 \\ x+2 & si\ -1\le x\le 2 \\ \dfrac{ax+2b}{x-1} & si\ x>2\end{cases}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/mjFyou25fvI

VER VIDEO https://youtu.be/DNEbHCUTmW0

42. Dada la siguiente función calcula a y b para que sea continua.

$$\mathbf{f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} & si\ x<1 \\ kx+3 & si\ x\ge 1\end{cases}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/S1YnSnnMJDA

43. Calcula los siguientes límites y haz la interpretación geométrica de los resultados.

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x-1}$

b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-3x}{x^3-1}$

VER VIDEO https://youtu.be/qcMO8UWyCmI

44. Calcula los siguientes límites y haz la interpretación geométrica de los resultados.

a. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x-1}$

b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^2-1}$

VER VIDEO https://youtu.be/7Lapw72vFiY

45. Halla las asíntotas de las funciones siguientes y haz su interpretación geométrica.

a. $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x+3}$

VER VIDEO https://youtu.be/UccalmaB8fY

VER VIDEO https://youtu.be/jSELizzlb9A

b. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$

VER VIDEO https://youtu.be/h3yLK5mdbn0

46. Halla las asíntotas de las funciones siguientes y haz su interpretación geométrica.

a. $f(x) = \frac{x^3-x+1}{x+3}$

VER VIDEO https://youtu.be/rPZDDjn7N7I

b. $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+3}$

VER VIDEO https://youtu.be/H_CYzwkazQA

VER VIDEO https://youtu.be/CuJv_mIfDz4

47. Representa las funciones siguientes:

a. $f(x) = \sqrt{1-x}$

VER VIDEO https://youtu.be/jSELizzlb9A

b. $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x+2} & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ x^2-8x & \text{si } x > 3 \end{cases}$

VER VIDEO https://youtu.be/oxVr3XAIPak

48. Estudia la simetría de las funciones siguientes:

a. $f(x) = x^3 - x$

b. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

c. $f(x) = \frac{x^2}{x^4+3}$

VER VIDEO https://youtu.be/J-7Yv7mElHY

49. Estudia la simetría de las funciones siguientes:

a. $f(x) = x^4 - x^2$

b. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

$c. f(x) = \frac{x}{x^4 + x^2}$

VER VIDEO https://youtu.be/Z4htvjGTN0Y

50. Calcular aplicando la definición de derivada.

$a. f(x) = x^2 + x + 1$

VER VIDEO https://youtu.be/689rpwP1MzM

$b. f'(3) \text{ si } f(x) = \frac{x}{x-1}$

VER VIDEO https://youtu.be/PJXGs3ERaoo

51. Calcular aplicando la definición de derivada.

$a. f(x) = \frac{2}{x+3}$

VER VIDEO https://youtu.be/tR7xWSmsxRs

$b. f'(3) \text{ si } f(x) = -x^2 - x - 1$

VER VIDEO https://youtu.be/z2xSJ3SZbYo

52. Deriva y simplifica las siguientes funciones.

a. $y = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

$b. y = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

c. $y = (x^2 - 1)\cdot e^x$

VER VIDEO https://youtu.be/yWyZPzrjNl0

53. Deriva y simplifica las siguientes funciones.

$a. y = \frac{x^2+4}{x^2-4}$

$b. y = \ln\sqrt{x^3 - 1}$

$c. y = 3^{x^2-x-1}$

VER VIDEO https://youtu.be/9Pb8WsfwY-o

54. Hallar la recta tangente y la normal a $y = x^2 - 3x + 1$ en $x = 2$.

VER VIDEO https://youtu.be/NZiV3SbTItE

55. Hallar la recta tangente y la normal a $y = x^2 \cdot e^x$ en $x = 0$.

VER VIDEO https://youtu.be/w--UEyOKLa0

56. Determinar los valores de a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el punto (1, 0), tenga un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 0$.

VER VIDEO https://youtu.be/SkclLsirwyI

57. JUNIO 2012. La función $f(x) = x^3 + px^2 + q$ tiene un valor mínimo relativo igual a 7 en el. $x = 3$. Determina los valores de p y q.

VER VIDEO https://youtu.be/aC4HN0etWIE

58. Estudia la monotonía y curvatura de la función f(x) = $x^3 - 6x^2 + 1$.
VER VIDEO https://youtu.be/ITErin65sF4

59. Estudia la monotonía y curvatura de la función f(x).

$$\mathbf{f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/SYNeAoTFDw4

60. Estudia la monotonía y curvatura de la función f(x) = $x^4 - 8x + 1$.
VER VIDEO https://youtu.be/7OfYCsI97K8

61. Estudia la monotonía y curvatura de la función f(x).

$$\mathbf{f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/u9Qp_mtnghg

62. Estudia y representa la siguiente función:

$$\mathbf{f(x) = \frac{x^2}{x - 1}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/4N0rYuslMfo
VER VIDEO https://youtu.be/P3a3_LIiRJs

63. Estudia y representa la siguiente función:

$$\mathbf{f(x) = \frac{x}{(x - 1)^2}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/4zgPoiasMwc
VER VIDEO https://youtu.be/TqGinUBFYzM