SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN.

1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función f(x) = $\begin{cases} x^2+x+1 & \text{si } x<1 \\ 3x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

Continuidad:
continua en $(-\infty,1)$por ser función polinómica.
continua en $(1,+\infty)$por ser función polinómica.

$$\text{En } x=1 \begin{cases} f(1)=3 \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} x^2+x+1=3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 3x=3 \end{cases} \end{cases} \to \text{continua.}$$

Derivabilidad:
derivable en $(-\infty,1)$por ser función polinómica.
derivable en $(1,+\infty)$por ser función polinómica.

$$f'(x^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(x+h)^2+(x+h)+1-(x^2+x+1)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{h\cdot(2x+h+1)}{h}=2x+1\to f'(1^-)=3$$

$$f'(x^+)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3\cdot(x+h)-3x}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3x+3h-3x}{h}=3$$

$f'(1^-)=f'(1^+)\to$ derivable en $x=1$

Otra forma de hacerlo.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<1 \\ 3 & \text{si } x\geq 1 \end{cases} \to \begin{cases} f'(1^-)=3 \\ f'(1^+)=3 \end{cases} \to \text{derivable en } x=1$$

2. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función siguiente.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x+3} & \text{si } x<-2 \\ x^2+3x & \text{si } x\leq -2 \end{cases}$$

Continuidad:

$$\begin{cases} \text{continua en } (-\infty,-2) \text{ por ser cociente de polinomios y no anularse el denominador.} \\ \text{continua en } (-2,+\infty) \text{ por ser función polinómica.} \\ \text{En } x=-2 \begin{cases} f(-2)=-2 \\ \lim\limits_{x\to -2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x}{x+3} = -2 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} x^2+3x = -2 \end{cases} \end{cases} \to \text{continua.} \end{cases}$$

Derivabilidad:

$$f'(x^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\left(\frac{x+h}{x+h+3}\right) - \left(\frac{x}{x+3}\right)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{(x+h)\cdot(x+3) - x\cdot(x+h+3)}{(x+h+3)\cdot(x+3)}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{x^2+3x+hx+3h-x^2-hx-3x}{h\cdot(x+h+3)\cdot(x+3)} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3h}{h\cdot(x+h+3)\cdot(x+3)} = \frac{3}{(x+3)^2}$$

$$f'(-2^-) = 3$$

$$f'(x^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(x+h)^2+3\cdot(x+h)-(x^2+3x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h\cdot(2x+h+3)}{h} = 2x+3 \to f'(-2^+) = -3$$

$$f'(-2^-) = f'(-2^+) \to \text{no derivable en } x=-2$$

3. Hallar a y b para que la función f(x) sea continua y derivable en x = 1.

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{a\cdot x+3x^2} & \mathbf{si\ x<1} \\ \mathbf{(x+b)^2} & \mathbf{si\ x\geq 1} \end{cases}$$

Continuidad en $x=1$.

$$\begin{cases} f(1) = a+3 \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = a\cdot x+3x^2 = a+3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} (x+b)^2 = (1+b)^2 \end{cases} \end{cases} \to a+3=(1+b)^2$$

Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} a+6x & \text{si } x<1 \\ 2\cdot(x+b) & \text{si } x\geq 1 \end{cases} \to \begin{cases} f'(1^-) = a+6 \\ f'(1^+) = 2+2b \end{cases} \to a+6=2+2b$$

$$\text{Sistema:} \begin{cases} a+3=(1+b)^2 \\ a+6=2+2b \end{cases} \to \begin{cases} \begin{cases} a=-4+2\sqrt{2} \\ b=\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-4-2\sqrt{2} \\ b=-\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

4. Calcula a y b para que la función $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{\ln(x-1)^2+a} & \mathbf{si\ 3/2\leq x\leq 2} \\ \mathbf{b\cdot x^2-6x} & \mathbf{si\ 2<x\leq 4} \end{cases}$ sea continua en el intervalo [3/2, 4] y derivable en el intervalo (3/2, 4).

Continuidad en $x=2$.

$$\begin{cases} f(2) = \ln(2-1)^2+a = a \\ \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \ln(x-1)^2+a = a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} b\cdot x^2-6x = 4b-12 \end{cases} \end{cases} \to a=4b-12 \to a=0$$

Derivabilidad en $x=2$.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2\cdot(x+1)}{(x-1)^2} & \text{si } \dfrac{3}{2} \le x \le 2 \\ 2bx - 6 & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(2^-) = 6 \\ f'(2^+) = 4b - 6 \end{cases} \rightarrow 6 = 4b - 6 \rightarrow b = 3$$

5. Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años y su precio P(t) en miles de euros varió con el tiempo (en años) que llevaba en el mercado, según la función siguiente:

$$\mathbf{P(t)} = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40 & 0 \le t \le 6 \\ \frac{-113}{14}\cdot t^2 + \frac{3826}{7} & 6 < t \le 8 \end{cases}$$

a. ¿Cuál fue el precio de salida del producto?

b. ¿Es continua la función, es derivable?

c. ¿Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento del precio del producto?

d. ¿En qué momento se obtuvo el precio máximo y el precio mínimo y cuáles fueron éstos?

VER VIDEO https://youtu.be/UdIw6w2e-8E

a. El precio de salida ($t = 0$) fue de 40000 €.

b.

$$\text{Continuidad en } t = 6 \begin{cases} P(6) = 256 \\ \lim\limits_{t\to 6} P(t) = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 6^-} \dfrac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40 = 256 \\ \lim\limits_{t\to 6^+} \dfrac{-113}{14}\cdot t^2 + \dfrac{3826}{7} = 256 \end{cases} \end{cases}$$

Como $P(6) = \lim\limits_{t\to 6^-} P(t) = \lim\limits_{t\to 6^+} P(t) = 256$, la función es continua en $t = 6$.

En el resto del intervalo $(0, 8)$ es continua por ser función polinómica.

Derivabilidad en $t = 6$.

$$P'(t) = \begin{cases} t^2 + 8t & 0 < t < 6 \\ \dfrac{-113}{7}\cdot t & 6 < t < 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P'(6^-) = 84 \\ P'(6^+) = \dfrac{-678}{7} \end{cases}$$

Como $P'(6^-) \neq P'(6^+)$, la función no es derivable en $t = 6$.

En el resto del intervalo $(0, 8)$ es derivable por ser función polinómica.

c y d.

$$t^2 + 8t = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -8 \text{ no válido} \end{cases}$$

$$\frac{-113}{7}\cdot t = 0 \rightarrow t = 0, \text{no válido.}$$

t	0		6		8
P(t)	40	↗	256	↘	30
P'(t)	0	+		–	

Crece en (0,6), decrece en (6, 8), toma el valor máximo 256 en t=6 y toma el valor mínimo 30 en $t = 8$.

6. Los beneficios (en miles de euros) por la venta de un producto en función de la inversión realizada en promoción (en miles de euros), viene dada por

4

$$\mathbf{B(x)} = \begin{cases} \mathbf{5x + 15}, & \mathbf{si\ 0 \le x \le 3} \\ \mathbf{-(x-3)^2 + 30} & \mathbf{si\ 3 < x \le 8} \end{cases}$$

a. ¿Es continua esta función, es derivable? Represéntala gráficamente.

b. ¿Cuándo crece y cuando decrece la función beneficio?

c. ¿Cuándo se obtienen los beneficios mínimo y máximo?

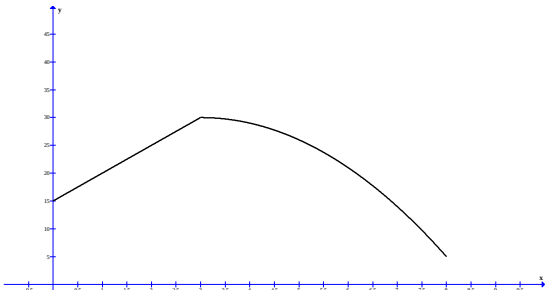
d. Representa la función derivada.

VER VIDEO https://youtu.be/nRVqZ9Mn0dM

a. Las funciones polinómicas son continuas en R. Debemos estudiar la continuidad en $x = 3$

$$\left\{\begin{array}{l} B(3) = 30 \\ \lim\limits_{x\to 3} B(x) = \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} 5x + 15 = 30 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} -(x-3)^2 + 30 = 30 \end{array}\right. \end{array}\right\} \to B(3) = \lim_{x\to 3} B(x) \to$$

$B(x)$es continua en $x = 3$



Viendo la gráfica podemos definir los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. La función tiene un punto anguloso en x = 3, lo que implica que no es derivable en dicho punto.