SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

CONTINUIDAD DE FUNCIONES.

1. Estudia la continuidad de la siguiente función.

$$y = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x < -3 \\ 2x - 1 & \text{si } -3 \le x \le 1 \\ \dfrac{3}{x+2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

VER VIDEO https://youtu.be/bzSnfk76Qrg

$x^2 - 3$	-3	$2x - 1$	1	$\dfrac{3}{x+2}$
Continua por ser función polinómica.	•	Continua por ser función polinómica.	••	En x = - 2 se anula el denominador. Pero el x = - 2 no está en esta zona (x > 1) Continua.

$$\bullet \text{ En } x = -3 \begin{cases} f(-3) = 2 \cdot (-3) - 1 = -7 \\ \lim\limits_{x \to -3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = x^2 - 3 = 6 \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = 2x - 1 = -7 \end{cases} \end{cases} \to \text{Discontinua de salto}$$

$$\bullet\bullet \text{ En } x = 1 \begin{cases} f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2x - 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{3}{x+2} = 1 \end{cases} \end{cases} \to \text{Continua.}$$

2. Estudia la continuidad de la siguiente función.

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x+4} & \text{si } x < -3 \\ 3x - 1 & \text{si } -3 \le x \le 1 \\ \sqrt{x - 2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

VER VIDEO https://youtu.be/ngV0Vy5igSQ

$\frac{x^2-16}{x+4}$	– 3	3x – 1	1	$\sqrt{x-2}$
En x = - 4 se anula el denominador. Continua en el intervalo excepto en x = - 4	•	Continua por ser función polinómica.	••	X – 2 ≥ 0; x ≥ 2. Discontinua (1, 2)

$$\bullet \text{ En } x=-3\left\{\begin{array}{c} f(-3)=3\cdot(-3)-1=-10 \\ \lim_{x\to -3} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to -3^-} f(x)=\frac{x^2-16}{x+4}=-7 \\ \lim_{x\to -3^+} f(x)=3x-1=-10 \end{array}\right. \end{array}\right\} \to \text{Discontinua de salto}$$

$$\bullet\bullet \text{ En } x=1\left\{\begin{array}{c} f(1)=3\cdot 1-1=2 \\ \lim_{x\to -3} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x)=3x-1=2 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\sqrt{x-2};\ \nexists \end{array}\right. \end{array}\right\} \to \text{Discontinua}$$

3. Dada la siguiente función calcula a y b para que sea continua y represéntala para esos valores de a y b.

$$\mathbf{f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & si\ x<\ -1 \\ x+2 & si -1\le x\le 2 \\ \dfrac{ax+2b}{x-1} & si\ x>2 \end{cases}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/mjFyou25fvI
VER VIDEO https://youtu.be/DNEbHCUTmW0

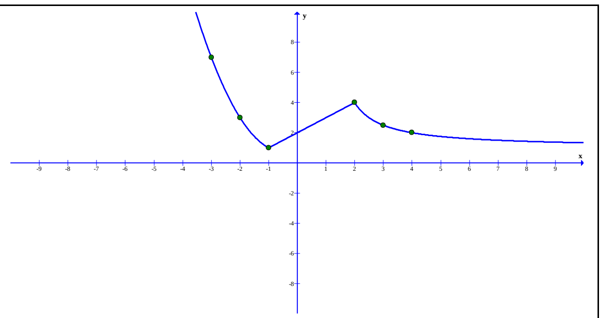
$$x=-1\left\{\begin{array}{l} f(-1)=1 \\ \lim_{x\to -1} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} ax^2+bx+1=a-b+1 \\ \lim_{x\to -1^+} x+2=1 \end{array}\right. \end{array}\right. \to a-b+1=1; a-b=0$$

$$x=2\left\{\begin{array}{l} f(2)=4 \\ \lim_{x\to 2} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} x+2=4 \\ \lim_{x\to 2^+} \dfrac{ax+2b}{x-1}=2a+2b \end{array}\right. \end{array}\right. \to 2a+2b=4; a+b=2$$

$$\begin{cases} a-b=0 \\ a+b=2 \end{cases} \to \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & si\ x<\ -1 \\ x+2 & si -1\le x\le 2 \\ \dfrac{x+2}{x-1} & si\ x>2 \end{cases}$$

x	y	
– 3	7	Parábola
– 2	3	
– 1	1	
– 1	1	Recta
2	4	
2	4	Función de proporcionalidad.
3	2.5	
4	2	



4. Dada la siguiente función calcula k para que sea continua.

$$\mathbf{f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1} & si\ x<1\\ kx+3 \quad si\ x\geq 1\end{cases}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/S1YnSnnMJDA

$$x=1\begin{cases} f(1)=k+3\\ \lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}=\dfrac{0}{0}=\lim_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)^2}{x-1}=0\end{cases}\end{cases}\to k+3=0; k=-3$$

5. Dada la función, estudia su continuidad y los tipos de discontinuidad que presenta.

$$\mathbf{y=\frac{x^2+x}{x^2-4x}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/Jag569F9XVI

Dominio $\left(x^2-4x=0\to\begin{cases}x=0\\x=4\end{cases}\right)\to D=R-\{0,4\}$

Discontinua en x = 0 y x = 4. El tipo de discontinuidad lo estudiamos calculando los límites.

$\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x^2-4x}=\dfrac{0}{0}\ (ind.)=\lim_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}(x-4)}=\dfrac{-1}{4}\to$ Discontinuidad evitable pues el límite de la función en $x=0$ existe y es real.

$\lim_{x\to 4}\dfrac{x^2+x}{x^2-4x}=\dfrac{20}{0}\to$ Discontinuidad no evitable. Asintótica, pues el límite da $\dfrac{k}{0}$.

6.- Dada la función, estudia su continuidad y los tipos de discontinuidad que presenta.

$$\mathbf{y=\frac{x^2+3x}{x^3+27}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/81B_8b69Vsg

Dominio $(x^3+27=0\to x=-3)\to D=R-\{-3\}$

$\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2+3x}{x^3+27}=\dfrac{0}{0}\ (ind.)=\lim_{x\to -3}\dfrac{x\cancel{(x+3)}}{(x^2-3x+9)\cancel{(x+3)}}=\dfrac{-1}{9}\to$ Discontinuidad evitable pues el límite de la función en $x=-3$ existe y es real.

Factorizar el numerador (sacando factor común) y el denominador (por Ruffini).

	1	0	0	27
		– 3	9	– 27
– 3	1	– 3	9	0

7.- Dada la función, estudia su continuidad y los tipos de discontinuidad que presenta.

$$\mathbf{y=\frac{x^2+3x}{x^4+27}}$$

Dominio ($x^4 + 27 = 0 \to \nexists$ sol. real) $\to$ D = R
La función es continua en todo R. Las funciones racionales son continuas en su dominio.

8. Hallar a, b y c para que la función sea discontinua en x = 1 y x = 2, siendo evitable en x = 2.

$$\mathbf{y = \frac{x^2 + a}{x^2 + bx + c}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/IuUX9AdTYMg

Para que sea discontinua en x = 1 y x = 2 el denominador de la función debe anularse para esos dos valores.

$$\begin{cases} \text{Para } x = 1 \to 1 + b + c = 0 \\ \text{Para } x = 2 \to 4 + 2b + c = 0 \end{cases} \to \begin{cases} b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$$

Para que sea evitable en x = 2 el numerador también debe anularse en este punto.
4 + a = 0 → a = – 4

9. La función siguiente representa la valoración de una empresa, en millones de euros, en función del tiempo t en los últimos 13 años.

$$\mathbf{F(t)} = \begin{cases} \mathbf{5 - 0,1 \cdot t} & \mathbf{0 \le t < 5} \\ \mathbf{a + 0,05 \cdot (t - 5)} & \mathbf{5 \le t < 10} \\ \mathbf{4,75 + 0,3 \cdot (t - b)} & \mathbf{10 \le t \le 13} \end{cases}$$

a. Calcula el valor de a y b para que la valoración de la empresa sea una función continua del tiempo.

b. ¿Cuál era el valor inicial de la empresa, y el valor a los 13 años?

VER VÍDEO https://youtu.be/FbuVQWNVSuo

Continua en t = 5

$$\begin{cases} f(5) = a \\ \lim_{t\to 5} f(t) = \begin{cases} \lim_{t\to 5^-} 5 - 0{,}1t = 4{,}5 \\ \lim_{t\to 5^+} a + 0{,}05 \cdot (t-5) = a \end{cases} \end{cases} \to a = 4{,}5$$

Continua en t = 10

$$\begin{cases} f(10) = 4{,}75 + 0{,}3 \cdot (10 - b) = 7{,}75 - 0{,}3b \\ \lim_{t\to 10} f(t) = \begin{cases} \lim_{t\to 10^-} a + 0{,}05 \cdot (t-5) = a + 0{,}25 = 4{,}75 \\ \lim_{t\to 10^+} 4{,}75 + 0{,}3 \cdot (t - b) = 4{,}75 + 0{,}3 \cdot (10 - b) \end{cases} \end{cases} ; 7{,}75 - 0{,}3b = 4{,}75$$

$b = 10$

Valor inicial de la empresa: $f(0) = 5$ millones de euros

Valor de la empresa a los 13 años: $f(13) = 4{,}75 + 0{,}3 \cdot (13 - 10) = 5{,}65$ millon

10. El tipo de interés anual que ofrece una financiera depende del tiempo que el cliente esté dispuesto a mantener la inversión y viene dada por la función siguiente:

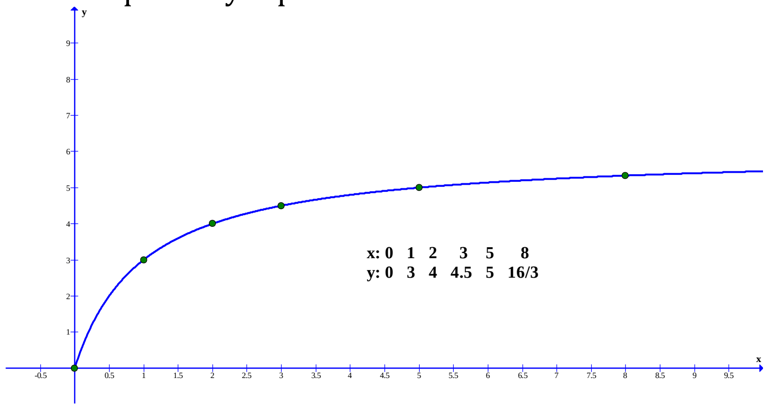
$$\mathbf{I(t) = \frac{6t}{t+1}; t > 0}$$

a. Representa la función para un período de 10 años.

b. ¿A qué valor tiende el interés si la inversión se mantiene durante mucho tiempo?

INTERES VER VÍDEO https://youtu.be/bPtza0fbQQo

Hacemos una tabla de puntos y representamos.



$$\lim_{t\to+\infty}\frac{6t}{t+1}=6,\text{ a largo plazo el interés se estabiliza en 6.}$$

La función p(t) muestra como varía la profundidad de la capa de arena de una playa desde la construcción de un dique (p en metros y t en años). Si la profundidad llega a superar los 4 metros se tendrá que elevar el paseo marítimo.

a. Estudia si la profundidad es una función continua del tiempo.

b. A largo plazo ¿hará falta elevar la altura del paseo?

$$\mathbf{p(t)=\begin{cases}2+t^2 & 0\le t\le 1\\ \dfrac{8t^2-t-1}{2t^2} & t>1\end{cases}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/ZLq0qTPefTc

a.

Continua en $t=1$

$$\begin{cases}p(1)=3\\ \lim_{t\to1}p(t)=\begin{cases}\lim_{t\to1^-}2+t^2=3\\ \lim_{t\to1^+}\dfrac{8t^2-t-1}{2t^2}=3\end{cases}\end{cases}\to\text{Es continua.}$$

b.

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{8t^2-t-1}{2t^2}=4$$

A muy largo plazo la capa de arena alcanzaría los 4 metros, luego no hace falta elevar el paseo marítimo

12. En una empresa se hacen montajes en cadena el número de montajes hechos por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función siguiente :

$$\mathbf{M(t)=\frac{30t}{t+4};\ (t\ en\ días).}$$

a. ¿Cuántos montaje hará al acabar un periodo de entrenamiento de 20 días?

b. Halla la asíntota horizontal y explica su significado.

$$\text{a. } M(20)=\frac{30\cdot 20}{20+4}=25 \text{ montajes.}$$

$$\text{b. } \lim_{t\to+\infty}\frac{30t}{t+4}=30$$

El límite anterior nos indica que no puede pasar de los 30 montajes por muchas horas que entrene.

12. Considera la función $f(x)=\begin{cases} e^{x-1} & \text{si } -1\le x<1 \\ (x+a)^2 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$. ¿Para que valores de a la función es continua en x = 1?

VER VIDEO https://youtu.be/sbs1dmJ0Pa0

Continuidad en $x=1$

$$\left.\begin{cases} f(1)=(1+a)^2 \\ \lim\limits_{x\to1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-} e^{x-1}=1 \\ \lim\limits_{x\to1^+}(x+a)^2=(1+a)^2\end{cases}\end{cases}\right\} \overbrace{(1+a)^2=1}^{f(1)=\lim\limits_{x\to1} f(x)} \begin{cases} a=0 \\ a=-2\end{cases}$$