SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

ASÍNTOTAS.

$$\begin{cases} \text{Verticales: calcula los limites en los puntos excluidos del dominio.} \\ \text{Horizontales. Calcular } \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \text{ y } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \\ \text{Oblicuas: } \begin{cases} \text{Racional: efectúa la división: } y = \text{cociente} \\ y = mx + n \to \begin{cases} m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Funciones racionales: } \begin{cases} \text{Horizontal: Si grado numerador} \leq \text{grado denominador} \\ \qquad \text{Basta hacer } \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \\ \text{Oblicua: Si grado numerador} - \text{grado denominador} = 1 \end{cases}$$

Una función no puede tener asíntota horizontal y oblicua.

1. Halla las asíntotas de las funciones siguientes y haz su interpretación geométrica.

$$\mathbf{a.\ f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x + 3}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/UccalmaB8fY

VER VIDEO https://youtu.be/jSELizzlb9A

$$\mathbf{b.\ f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/h3yLK5mdbn0

a.

Dominio: $x + 3 = 0$; $x = -3$; $D = R - \{-3\}$

Asíntota vertical. Estudiamos la recta $x = -3$

$$\lim_{x\to-3} \frac{x^2 - x + 1}{x + 3} = \frac{13}{0} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to-3^-} = \dfrac{+}{-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-3^+} = \dfrac{+}{+} = +\infty \end{cases}$$

Asíntota horizontal. No tiene.

Asíntota oblicua. Sí tiene.

$$y = mx + n \to \begin{cases} m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 3x} = 1 \\ n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + 3} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x + 1}{x + 3} = -4 \end{cases}$$

$y = x - 4$

b.

Dominio: $x^2 + 3 = 0$; ∄ sol; D = R

Asíntotas verticales: No hay.

Asíntotas horizontales: sí tiene.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} = 1; x = 1$$

Asíntotas oblicuas: no tiene

2. Halla las asíntotas de las funciones siguientes y haz su interpretación geométrica.

$$\mathbf{a.\, f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x + 3}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/rPZDDjn7N7I

$$\mathbf{b.\, f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3}}$$

VER VIDEO https://youtu.be/H_CYzwkazQA

VER VIDEO https://youtu.be/CuJv_mIfDz4

a.

Dominio: $x + 3 = 0$; $x = -3$; D = R – {−3}

Asíntota vertical: estudiamos la recta $x = -3$

Asíntotas horizontal y oblicua no tiene.

b.

Dominio: $x^2 + 3 = 0$; ∄ sol; D = R

Asíntotas verticales: No hay.

Asíntotas horizontales: no tiene.

Asíntotas oblicuas: sí tiene.

$$y = mx + n \to \begin{cases} m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 3x} = 1 \\ n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x - 1}{x^2 + 3} = 0 \end{cases}$$

$y = x$

3. Halla las asíntotas de la función f(x).

$$\mathbf{f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}}$$

Dominio: R −{1}

Verticales: $\lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0} \to$ En $x = 1$ hay una asintota vertical.

Horizontales:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{\infty}{\infty}(\text{ind.})=0;\text{ La recta } y=0 \text{ (eje X) es una asíntota horizontal.}$$

4. Halla las asíntotas de la función f(x).

$$\mathbf{f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}.$$

a) El dominio es R.

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=1 \rightarrow \text{tiene una asíntota horizontal en } y=1$$

No tiene asíntotas oblicuas.

5. Halla las asíntotas de la función f(x).

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x}{x^2+1}}$$

Dominio: R

Verticales: no tiene pues el dominio es R.

Horizontales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}(\text{ind.})=0\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=\frac{-\infty}{\infty}(\text{ind.})=0\end{array}\right\}\text{La recta } y=0 \text{ (eje X) es una asíntota horizontal.}$$

Oblicuas no tiene.

6. Halla las asíntotas de la función

$$\mathbf{f(x)=\frac{x^2}{x-1}}$$

1.- Dominio: x – 1 = 0; x = 1; R−{1}

Verticales: $\lim_{x\to1}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{0}\rightarrow$ En $x=1$ hay una asintota vertical.

Horizontales: no tiene pues el grado del numerador > grado denominador.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}(\text{ind.})=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1}=\frac{-\infty}{\infty}(\text{ind.})=-\infty$$

Oblicua: Si tiene pues grado numerador – grado denominador = 1.

$$y=mx+n\begin{cases}m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}(\text{ind})=1\\ n=\lim_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}(\text{ind})=1\end{cases}$$

$y=x+1$

7 La recta y = 2x – 1 es una asíntota oblicua de la función f(x). Hallar el valor de k.

$$\mathbf{f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + k}}$$

A. oblicua
$y = mx + n$ $\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + kx} = 2 \\ n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 1}{x + k} - 2x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2kx - 1}{x + k} = -2k \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x - 2k \end{cases} \to -1 = -2k \to k = \frac{1}{2}$$

8. La recta y = 2x – 2 es una asíntota oblicua de la función f(x). Calcular el valor de k.

$$\mathbf{f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x + k}}.$$

Asíntota oblicua: $y = mx + n$ $\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx \end{cases}$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2 + 1}{x + k}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + kx} = \frac{\infty}{\infty}(\text{ind}) = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 1}{x + k} - 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 - 2kx}{x + k} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - 2kx}{x + k}$$

$= \frac{\infty}{\infty}(\text{ind}) = -2k$. La asíntota es: y = 2x – 2k

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = 2x - 2k \end{cases} \to -2 = -2k \to k = 1$$

9. Halla las asíntotas de la función f(x).

$$\mathbf{f(x) = \frac{x}{e^x}}$$

Dominio = R

Verticales: no tiene pues el dominio es R.

Horizontales:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{\infty}{\infty}(\text{ind.}) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{\infty} = 0 \to$ El eje X es asintota horizontal.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$$

No tiene oblicuas.

10. Halla las asíntotas de la función f(x).

$$\mathbf{y = \frac{e^x}{x}}$$

Dominio: x = 0; D = R – {0}

Verticales: Estudiamos la recta x = 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x}=\frac{1}{0}\rightarrow \text{El eje Y es asintota vertical.}$$

Horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x}=\frac{\infty}{\infty}(\text{ind.})=\lim_{x\to\infty}e^x=\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{x}=\frac{0}{-\infty}=0\rightarrow \text{el eje X es asintota horizontal.}$$

11. Halla las asíntotas de la función f(x).

$$\mathbf{y=\frac{x+1}{L(x+1)}}$$

Dominio: $\begin{cases}L(x+1)=0;\, x+1=e^0;\, x=0\\ x+1>0;\, x>-1\end{cases}\rightarrow \text{Dom}=(-1{,}0)\cup(0,+\infty)$

Verticales: Estudiamos en x = –1 y en x = 0

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{L(x+1)}=\frac{0}{\ln 0}=0\rightarrow \text{La función empieza en el punto abierto }(-1,0).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{L(x+1)}=\frac{1}{0}\rightarrow \text{El eje Y es asintota vertical.}$$

Horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+1}{L(x+1)}=\frac{\infty}{\infty}(\text{ind.})=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}x+1=+\infty$$

Oblicuas: y = mx + n $\begin{cases}m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\\ n=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-mx\end{cases}$

$$m=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x+1}{L(x+1)}}{x}=\frac{\infty}{\infty}(\text{ind.})=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+1}{x.\,L(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\infty}{\infty}(\text{ind.})=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{L(x+1)+\frac{x}{x+1}}=\frac{1}{\infty}=0\rightarrow \text{no tiene asíntota oblicua.}$$

12. Halla las asíntotas de la función f(x).

$$\mathbf{f(x)=\frac{L(x+1)}{x+1}}$$

1.- Dominio: $\begin{cases}x+1>0\rightarrow x>-1\\ x+1\neq 0\rightarrow x\neq -1\end{cases}\rightarrow$ D = (– 1, +∞)

- Verticales:

$$\lim_{x\to -1}\frac{L(x+1)}{x+1}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty.\text{ Tiene asíntota vertical }x=-1.$$

- Horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{L(x+1)}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}(\text{ind.})=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0.$$

El eje X es asíntota horizontal.

13. Halla las asíntotas de la función f(x). $y = x.e^{x}$

Dominio: R
Verticales: no tiene pues dom $= R$
Horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} x.e^{x} = \infty.\infty = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x.e^{x} = -\infty.0(\text{ind.}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty}(\text{ind.}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

El eje X es asíntota horizontal en el $-\infty$.

14. Halla las asíntotas de la función f (x) = $\sqrt{1+x+x^2}$.

Dominio: $1+x+x^2 \geq 0;\ 1+x+x^2 = 0\ \nexists$ sol. $f(0) = 1$; Dom $= R$
Verticales no tiene pues Dom. $= R$

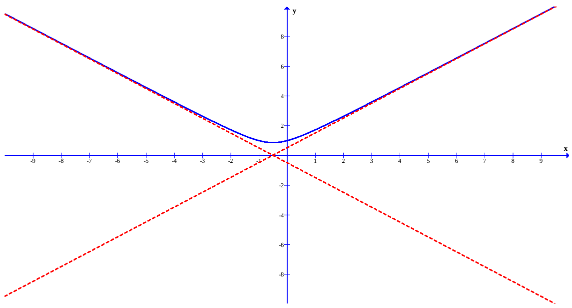
$$\text{Horizontales:}\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x+x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+x+x^2} = +\infty\end{cases}$$ No tiene asíntotas horizontales.

$$\text{Oblicuas: } y = mx+n \begin{cases} m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}}{x} = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x+x^2} - x = \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{1+x+x^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{1+x+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x+x^2}+x} = \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{1+x+x^2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{1+x+x^2}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+x} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$y = x + \frac{1}{2}$$

$$\text{Oblicuas: } y = mx+n \begin{cases} m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}}{x} = -1 \\ n = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+x+x^2} + x = \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left(\sqrt{1+x+x^2}+x\right)\cdot\left(\sqrt{1+x+x^2}-x\right)}{\sqrt{1+x+x^2}-x} = \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left(\sqrt{1+x+x^2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{1+x+x^2}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}-x} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

$$y = -x - \frac{1}{2}$$


y
x
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
1
2
3
4
5
6
7
8
9