SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

SELECTIVIDAD MATEMÁTICAS APLICADAS. JULIO 2019. U.I.B.

OPCIÓN A.

1. **a. Dadas A, una matriz invertible cualquiera, y A^{-1} la inversa, ¿Qué matriz se obtiene al calcular $A \cdot A^{-1}$ y $A^{-1} \cdot A$?**

b. Considera la matriz $\begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$

i. Calcular los valores de x que satisfacen $A^2 = 2 \cdot A$

ii. Si x = - 1, calcula A^{-1} y comprueba el resultado calculando $A \cdot A^{-1}$.

VER VÍDEO https://youtu.be/ptQCTlM9J3c

a. Por definición de matriz inversa los productos $A \cdot A^{-1}$ y $A^{-1} \cdot A$ dan la identidad I.

b.

$$A^2 = 2A;\ \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 4 & x^2+4x \\ 0 & (x+2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2x \\ 0 & 2x+4 \end{pmatrix};$$

$$x^2 + 2x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\overbrace{A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{|A|=2};\ A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};\ AdjA^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};\ A^{-1} = \frac{AdjA^t}{|A|} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años y su precio P(t) en miles de euros varió con el tiempo (en años) que llevaba en el mercado, según la función siguiente:**

2

$$\mathbf{P(t)} = \begin{cases} \frac{1}{3}\mathbf{t^3 + 4t^2 + 40} & \mathbf{0 \le t \le 6} \\ \frac{-113}{14} \cdot \mathbf{t^2} + \frac{3826}{7} & \mathbf{6 < t \le 8} \end{cases}$$

a. ¿Cuál fue el precio de salida del producto?
b. ¿Es continua la función, es derivable?
c. ¿Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento del precio del producto?
d. ¿En qué momento se obtuvo el precio máximo y el precio mínimo y cuáles fueron éstos?

VER VÍDEO https://youtu.be/UdIw6w2e-8E

a. El precio de salida ($t = 0$) fue de 40000 €.

b.

$$\text{Continuidad en } t = 6 \begin{cases} P(6) = 256 \\ \lim\limits_{t\to 6} P(t) = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 6^-} \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40 = 256 \\ \lim\limits_{t\to 6^+} \frac{-113}{14} \cdot t^2 + \frac{3826}{7} = 256 \end{cases} \end{cases}$$

Como $P(6) = \lim\limits_{t\to 6^-} P(t) = \lim\limits_{t\to 6^+} P(t) = 256$, la función es continua en $t = 6$.

En el resto del intervalo $(0, 8)$ es continua por ser función polinómica.

Derivabilidad en $t = 6$.

$$P'(t) = \begin{cases} t^2 + 8t & 0 < t < 6 \\ \frac{-113}{7} \cdot t & 6 < t < 8 \end{cases} \to \begin{cases} P'(6^-) = 84 \\ P'(6^+) = \frac{-678}{7} \end{cases}$$

Como $P'(6^-) \neq P'(6^+)$, la función no es derivable en $t = 6$.

En el resto del intervalo $(0, 8)$ es derivable por ser función polinómica.

c y d.

$$t^2 + 8t = 0 \to \begin{cases} t = 0 \\ t = -8 \text{ no válido} \end{cases}$$

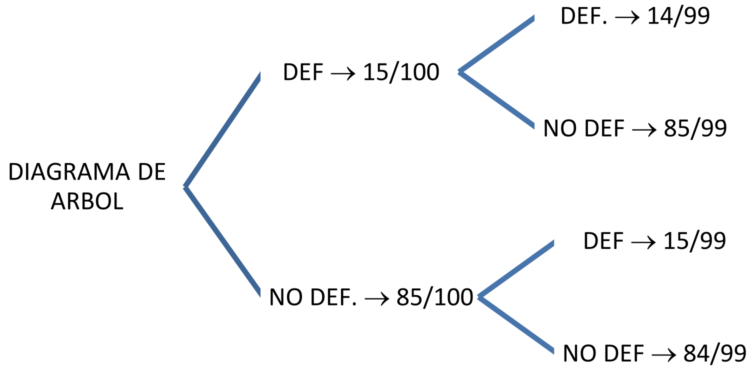
$$\frac{-113}{7} \cdot t = 0 \to t = 0, \text{no válido.}$$

t	0		6		8
P(t)	40	↗	256	↘	30
P'(t)	0	+		–	

Crece en (0,6), decrece en (6, 8), toma el valor máximo 256 en t=6 y toma el valor mínimo 30 en t = 8.

3. **En una máquina se han fabricado 100 piezas, de las cuales 15 han presentado algún defecto.**
a. Calcula la proporción de piezas que no son defectuosas.
b. Calcula la probabilidad de que si examinamos dos piezas al azar, ambas sean defectuosas.
c. Si tomamos dos piezas al azar, y la 1ª es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la 2ª no lo sea?

VER VÍDEO https://youtu.be/6SSYUCLDaC8



a. El 85 % no son defectuosas.

b.

$$P(\text{ambas def.}) = P(DEF_1 \cap DEF_2) = \frac{15}{100} \cdot \frac{14}{99} = \frac{7}{330}$$

$$P\left({}^{NO\ DEF_2}/_{DEF_1}\right) = \frac{P(NO\ DEF_2 \cap DEF_1)}{P(DEF_1)} = \frac{\frac{15}{100} \cdot \frac{85}{99}}{\frac{15}{100}} = \frac{85}{99}$$

---

4. El 70 % de los alumnos de bachillerato tienen móvil.

a. Si en un centro hay 1400 alumnos de bachillerato, ¿cuántos se espera que tenga móvil?

b. ¿Cuál es la probabilidad de qué en una muestra aleatoria con repetición de 150 alumnos de bachillerato haya más de 100 con teléfono móvil?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 200 alumnos de bachillerato haya 140 o menos con teléfono móvil?

VER VÍDEO https://youtu.be/bmWfpyvJbc0

---

a.

Tienen móvil $1400 \cdot \frac{70}{100} = 980$ alumnos.

b. Se trata de una distribución binomial (150, 0'7). Debemos calcular $P(x > 100)$.

No es operativo hacerlo como binomial, aproximamos a distribución normal.

$$\text{Binomial}\begin{cases} n = 150 \\ p = 0,7 \\ q = 0,3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} np = 105 > 5 \\ nq = 45 > 5 \end{cases} \rightarrow N\left(np, \sqrt{npq}\right) = N(105{,}5'61)$$

$$P(x > 100) = P(x' \geq 100{,}5) = P\left(z > \frac{100{,}5 - 105}{5{,}61}\right) = P(z > -0{,}8) = P(z < 0{,}8) = 0{,}7881$$

c. Se trata de una distribución binomial (200, 0'7). Debemos calcular $P(x \leq 140)$.

No es operativo hacerlo como binomial, aproximamos a distribución normal.

$$\text{Binomial}\begin{cases} n = 200 \\ p = 0,7 \\ q = 0,3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} np = 140 > 5 \\ nq = 60 > 5 \end{cases} \rightarrow N\left(np, \sqrt{npq}\right) = N(140{,}6'48)$$

$$P(x \leq 140) = P(x' \leq 140{,}5) = P\left(z \leq \frac{140{,}5 - 140}{6{,}48}\right) = P(z \leq 0{,}08) = 0{,}5319$$

OPCIÓN B.

1. **Una escuela tiene tres partidas de presupuesto: libros, artículos de oficina y muebles. El presupuesto para muebles en este instituto es cinco veces la suma de los libros más el material de oficina. El presupuesto para libros es el triple del material de oficina. La suma del presupuesto para muebles y material de oficina es 7 veces el presupuesto de libros.**

a. Con estos datos, ¿podemos saber el dinero destinado a los presupuestos de cada partida?

b. Determinar los importes si para los libros hay 2100 €.

VER VÍDEO https://youtu.be/C14bcav-PWU

$$\left.\begin{array}{l} M = 5(A+L) \\ L = 3A \\ M + A = 7L \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} M - 5A - 5L = 0 \\ 3A - L = 0 \\ M + A - 7L = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{S.C. INDETERMINADO. } (\infty \text{ SOL.})$$

Si $L = 2100$ €; $A = 700$ € y $M = 14000$ €

2. **KSE es una empresa que fabrica dos modelos de guantes: un modelo normal y un modelo de lujo. La empresa tiene disponibles 900 horas de tiempo en el departamento de producción, 300 horas en el departamento de acabado y 100 horas en el departamento de empaquetado. Las horas necesarias de cada departamento por par de guantes y los beneficios, en €, se dan En la tabla siguiente:**

	PRODUCCIÓN	ACABADO	EMPAQUETADO	BENEFICIOS
NORMAL	1	1/2	1/8	4
LUJO	3/2	1/3	1/4	8

¿Cuántos pares de cada modelo han de fabricar para maximizar el beneficio cuál es este beneficio? Se ha de plantear el ejercicio como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinando y dibujando sus vértices.

VER VÍDEO https://youtu.be/ceakJVT389U

Función a optimizar: $B(x, y) = 4x + 8y$

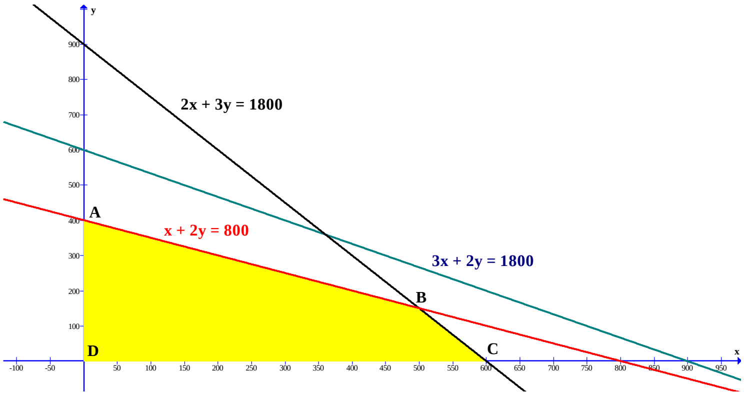
Restricciones:

$x,y \geq 0$

$x + 3/2y \leq 900 \rightarrow 2x + 3y \leq 1800$

$1/2x + 1/3y \leq 300 \rightarrow 3x + 2y \leq 1800$

$1/8x + 1/4y \leq 100 \rightarrow x + 2y \leq 800$



$A = (0, 400) \rightarrow B(A) = 3200$ €

$$B \begin{cases} x + 2y = 800 \\ 2x + 3y = 1800 \end{cases} \rightarrow (500,150) \rightarrow B(B) = 3200 \text{ €}$$

$C = (600, 0) \rightarrow B(C) = 2400$ €

$D = (0, 0) \rightarrow B(D) = 0$

Los puntos A y B dan el beneficio máximo de 3200 €. E,l resultado será para que el beneficio sea máximo, todos los puntos del segmento AB con coordenadas naturales, pues se trata del número de guantes.

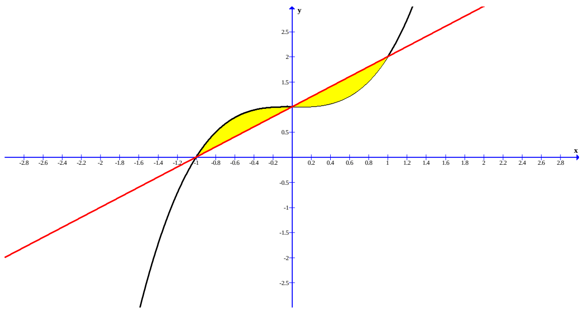
3. Dibuja el área comprendida entre las gráficas de las funciones siguientes y calcula el área del recinto anterior. $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = x + 1$

VER VÍDEO https://youtu.be/EF3V8z8No9Q

Para el estudio del área comprendida entre dos funciones el primer paso es buscar los puntos de corte entre ambas.

$$x^3 + 1 = x + 1 \rightarrow x^3 - x = 0 \rightarrow x\cdot(x^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde – 1 a 1, punto de corte inferior a punto de corte superior.



Realizamos el cálculo de áreas.

$$\int_{-1}^{0} [x^3 + 1 - (x + 1)]dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\int_{0}^{1} [x + 1 - (x^3 + 1)]dx = \int_{0}^{1} (x - x^3)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{1}{4}$$

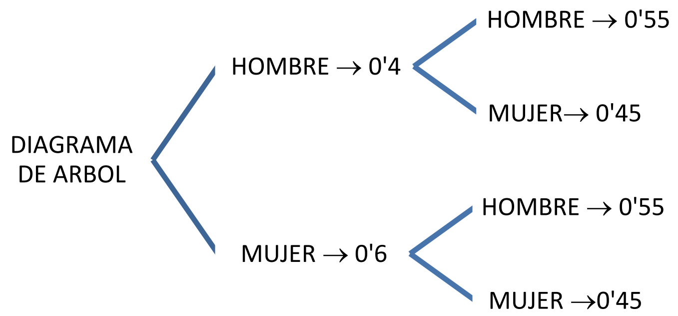
$$\text{Área total } = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}u^2$$

4. Una empresa tiene dos fábricas, en la 1ª el 60 % de los trabajadores son mujeres y en la 2ª el 55 % de los trabajadores son hombres. Se elige al azar un trabajador de cada fábrica para pertenecer al comité de empresa. Suponiendo que el hecho de pertenecer a una fábrica es independiente de pertenecer a la otra, calcula:

a. La probabilidad de los siguientes sucesos A: los dos son hombres; B: sólo hay una mujer y C: las dos son mujeres.

b. Razona si el suceso contrario al C es el A, el B, el A ∪ B, el A ∩ *B* o algún otro y calcula su probabilidad.

VER VÍDEO https://youtu.be/79K1MqKYuN4



a.

$P(A) = P(H_1)\cdot P(H_2) = 0,4\cdot 0,55 = 0,22$

$P(B) = P(H_1)\cdot P(M_2) + P(M_1)\cdot P(H_2) = 0,4\cdot 0,45 + 0,6\cdot 0,55 = 0,51$

$P(C) = P(M_1)\cdot P(M_2) = 0,6\cdot 0,45 = 0,27$

b. El suceso contrario a "las dos personas son mujeres" sería "hay algún hombre" que es el suceso A U B.

$P(AUB) = 1 - P(C) = 1 - 0,27 = 0,73$