SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

SELECTIVIDAD MATEMÁTICAS II U.I.B. JUNIO 2017.

OPCIÓN A.

1. Discutir según los valores de m el sistema siguiente $\left.\begin{array}{r} \mathbf{mx+3z=m} \\ \mathbf{x+2y-z=1} \\ \mathbf{2x+y-z=2} \end{array}\right\}$**. Resolverlo en el caso compatible indeterminado.**

VER VÍDEO https://youtu.be/vEzr0NuKH2s
VER VÍDEO https://youtu.be/byG6oHgZzYM

Tomamos el determinante de la matriz de coeficientes, lo resolvemos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación resultante.

$$A=\begin{pmatrix} m & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to |A| = -2m+3-12+m=0 \to m=-9$$

Discusión del sistema.

• Si m ≠ – 9 →|A| ≠ 0 → RA = 3 = RA* = nº incógnitas → Sistema compatible determinado.

• Si m = – 9

$$\text{Si } m=-9 \left\{\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix} -9 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} -9 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \to RA \geq 2 \\ |A|=0 \end{array}\right\} RA=2 \\ A^*=\begin{pmatrix} -9 & 0 & 3 & -9 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} -9 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \to RA^* \geq 2 \\ |A|=0 \to \begin{vmatrix} -9 & 0 & -9 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \end{array}\right. \quad RA^*=2 \end{array}\right.$$

Rangos iguales y menor que el número de incógnitas, sistema compatible indeterminado.

$$\begin{cases} -9x + 3z = -9 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases} \overset{\substack{\text{Haciendo} \\ x=\mu}}{\Rightarrow} \begin{cases} 3z = -9 + 9\mu \rightarrow z = -3 + 3\mu \\ 2y = 1 - x + z = 1 - \mu - 3 + 3\mu \rightarrow y = -1 + \mu \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = -3 + 3\mu \end{cases}$$

También podemos hacer $z = \mu$ $\begin{cases} x = 1 + \dfrac{\mu}{3} \\ y = \dfrac{\mu}{3} \\ z = \mu \end{cases}$

2. El número de litros por metro cuadrado que llovió en un determinado sitio viene dado por la expresión:

$$\mathbf{Q(t) = \frac{-t^3}{8} + 3\frac{t^2}{2} - 9\frac{t}{2} + 10}$$

donde t expresa los días desde t = 1, lunes; hasta t = 8, lunes de la semana siguiente.

a. Determina el día de la semana en que llovió más y menos y cuento llovió esos días.

b. Efectúa un dibujo de la función durante esos 8 días.

VER VÍDEO https://youtu.be/VCqCzaLVcq4

$$Q'(t) = -\frac{3}{8}t^2 + 3t - \frac{9}{2} = 0 \begin{cases} t = 2 \\ t = 6 \end{cases}$$

DIA	Q(t)
1	6,875
2	6
6	10
8	6

Los días en que llovió menos fueron el día 2 (martes) y 8 (lunes de la siguiente semana) con 6 L/m^2 y el día que llovió más fue el 6 (sábado) con 10 L/m^2.

3. Dadas las rectas r y s:

3

a. Demostrar que se cruzan.
b. Calcula la distancia entre ellas.

$$\mathbf{r}: \frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{z+1}}{\mathbf{-1}} \ \mathbf{y}\ \mathbf{s}: \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{y-2}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{z+3}}{\mathbf{-2}}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/q-J9zYr1Jeo

a.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1} \begin{cases} Pr = (1,0,-1) \\ \vec{vr} = (2,3,-1) \end{cases}$$

$$s: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2} \begin{cases} Ps = (0,2,-1) \\ \vec{vs} = (1,2,-2) \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} \overrightarrow{PrPs} \\ \vec{vr} \\ \vec{vs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to |M| \neq 0 \to \text{Se cruzan.}$$

b.

$$\text{Distancia de r a s } = \left| \frac{\begin{vmatrix} \overrightarrow{RS} \\ \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \end{vmatrix}}{|\vec{v_r} x \vec{v_s}|} \right| ; D = \left| \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}} \right| = \left| \frac{10}{|(-4,3,1)|} \right| = \frac{10}{\sqrt{26}} \text{u.}$$

4. Lanzamos 2 dados de 6 caras no trucados y consideramos los sucesos siguientes: A "la suma de los resultados de los 2 dados es 7" y B "el producto de los resultados de los 2 dados es impar"
a. Calcula la probabilidad de cada uno de ellos.
b. ¿Son independientes los 2 sucesos?

VER VÍDEO https://youtu.be/gdVPUqV0bG8

Espacio muestral:

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

11	12	13	14	15	16	$P(A) = P(\text{suma} = 7) = \frac{6}{36}$
21	22	23	24	25	26	
31	32	33	34	35	36	
41	42	43	44	45	46	
51	52	53	54	55	56	
61	62	63	64	65	66	

11	12	13	14	15	16	$P(B) = P(\text{producto impar}) = \frac{9}{36}$
21	22	23	24	25	26	
31	32	33	34	35	36	

41	42	43	44	45	46	
51	52	53	54	55	56	
61	62	63	64	65	66	

b. $P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \rightarrow$ Son dependientes.

OPCIÓN B.

1. Tenemos tres grifos para llenar un depósito de agua y suponemos que el caudal de cada uno es constante. Si hacemos servir el grifo 1, tarda 10 horas en llenar el depósito. Si hacemos servir los grifos 1 y 2, tardan 4 horas, y si los hacemos servir los 3 tardan 1 hora. Suponiendo que la suma de los caudales de los 3 grifos es 10 l. por minuto. Calcula el caudal de agua de cada grifo y el volumen del depósito.

VER VÍDEO https://youtu.be/_hw5VRdKxfI

$$\begin{cases} 1 \rightarrow 10 \text{ h.} \\ 1+2 \rightarrow 4 \text{ h.} \\ 1+2+3 \rightarrow 1 \text{ h.} \end{cases}$$

$$\frac{10 \text{ L.}}{\text{minuto}} \cdot \frac{60 \text{ minutos}}{1 \text{ h.}} = 600 \frac{\text{L.}}{\text{h.}}$$

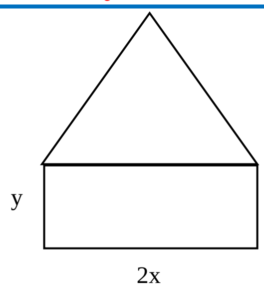
Si juntos los tres están una hora y el caudal de los tres es de 600 L./h.; el depósito tiene 600 L.

Si el primero está 10 h. en llenar un depósito de 600 L., su caudal es de 60 L./h.

Si los dos primeros están 4 h. en llenar un depósito de 600 L. y el primero tiene un caudal de 60 L./h. el segundo lo tendrá de (600 – 4·60)/4 = 90 L./h.

2. Hemos de diseñar una ventana en forma de polígono ACEDB, de 30 m. de perímetro. Se trata de un rectángulo con un triángulo equilátero encima. Calcular las dimensiones del rectángulo para que el área de la ventana sea máxima.

VER VÍDEO https://youtu.be/g1v-t23aQhw



1. Función a optimizar:

$$h_{\text{triángulo}} = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x \rightarrow A = 2xy + \frac{1}{2} 2\sqrt{3}x^2 = 2xy + \sqrt{3}x^2$$

2. Relación entre variables.

Per. = 30 → 30 = 2x + y + 2x + 2x + y = 6x + 2y → 15 = 3x + y → y = 15 – 3x

3. Sustituir 2 en 1

$$A = 2x(15-3x) + \sqrt{3}x^2 = 30x - 6x^2 + \sqrt{3}x^2$$

4. Derivo, igualo a cero y resuelvo la ecuación resultante.

$$A' = 30 - 12x + 2\sqrt{3}x = 0 \to x = \frac{30}{12-2\sqrt{3}} \to \text{Base} = 2x = 7{,}029 \to y = 4{,}46$$

5. Comprobar

f'(3) > 0 → crece	3,51	f'(4) < 0 → decrece

3. Dadas r y s, calcula:

a. El valor de m para que se corten.

b. Halla el punto de corte.

$$r: \left.\begin{matrix} x = 1 + mt \\ y = -1 + t \\ z = 3 - 2t \end{matrix}\right\} ;\ s: \frac{x-2}{m} = \frac{y}{2m} = \frac{z-3}{-1}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/HxpeFGCrKWA

$$r: \left.\begin{matrix} x = 1 + mt \\ y = -1 + t \\ z = 3 - 2t \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} Pr = (1,-1,3) \\ \overrightarrow{vr} = (m,1,-2) \end{matrix}\right.$$

$$s: \frac{x-2}{m} = \frac{y}{2m} = \frac{z-1}{-1} \left\{\begin{matrix} Ps = (2,0,3) \\ \overrightarrow{vs} = (m,2m,-1) \end{matrix}\right.$$

$$M = \begin{pmatrix} \overrightarrow{PrPs} \\ \overrightarrow{vr} \\ \overrightarrow{vs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ m & 1 & -2 \\ m & 2m & -1 \end{pmatrix} \to |M| = -1 - 2m - (-4m - m) = -1 + 3m = 0$$

$$m = \frac{1}{3}$$

Se cortan en el punto (resolviendo el sistema) (0, - 4, 9)

4. El análisis de la inteligencia (CI) es una prueba que en teoría mide la inteligencia del individuo y da un valor que aproximadamente tiene de media 100. Es decir, se asume que el nivel 100 es el nivel de inteligencia de una persona normal. Ahora supongamos que el nivel de inteligencia de una cierta población sigue una distribución normal de media de 100 y desviación típica 10.

a. Calcular el porcentaje de la población que se considera superdotada. Una persona se considera superdotada si tiene un nivel de inteligencia superior a 130.

b. Calcular el porcentaje de la población con un nivel de inteligencia entre 90 y 110.

c. Nos dicen que el 70% de la población tiene un nivel de inteligencia por debajo de un cierto umbral. Calcule este umbral.

VER VÍDEO https://youtu.be/ylQCe2YVyQk

a. $N(\mu,\sigma) = N(100,10)$

$$P(x \geq 130) = P\left(z \geq \frac{130 - 100}{10}\right) = P(z \geq 3) = 1 - P(z \leq 3) = 1 - 0.9987 =$$
$$= 0{,}0013$$

El 0,13 % de la población es superdotada.

b.

$$P(90 \leq x \leq 110) = P(x \leq 110) - P(x \leq 90) = P\left(z \leq \frac{110 - 100}{10}\right) - P\left(z \leq \frac{90 - 100}{10}\right) =$$
$$= P(z \leq 1) - P(z \leq -1) = 0{,}8413 - \big(1 - P(z \leq 1)\big) = 0{,}6827$$

El 68,27 % de la población está entre 90 y 110.

c.

$$P(x \leq k) = 0{,}7 \rightarrow P\left(z \leq \frac{k - 100}{10}\right) = 0{,}7 \rightarrow \frac{k - 100}{10} = 0{,}5244 \rightarrow k = 105{,}244$$