SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

SELECTIVIDAD MATEMÁTICAS II U.I.B. JUNIO 2016.

OPCIÓN A.

1. Para que valores de m el sistema es compatible.

$$\begin{cases} \mathbf{x + (m-2)y + 2mz = 1} \\ \mathbf{3x - y - 2z = 2} \\ \mathbf{x + z = 3} \end{cases}$$

Resolverlo para m = 1.

VER VÍDEO https://youtu.be/rXYHISQqPPI

VER VÍDEO https://youtu.be/lhD6brTvl_g

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m-2 & 2m \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ |A| = -1 - 2m + 4 + 2m - 3m + 6 = -3m + 9 = 0$$

$m = 3$

Si $m \neq 3$, $|A| \neq 0$, $Ra = RA^* = \text{nº incógnitas} = 3$, S. compatible determinado.

Si $m = 3$

$$\begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \to RA \geq 2 \\ |A| = 0 \end{cases} \to RA = 2 \\ A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \to RA \geq 2 \\ |A| = 0 \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases} \to RA^* = 3 \end{cases} \text{S. Incompatible.}$$

b. Para $m = 1$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x - y - 2z = 2 \\ x + z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{6} \\ y = \frac{17}{6} \\ z = \frac{5}{6} \end{cases}$$

2. Determinar m para que la recta r y el plano π formen un ángulo de 45° y calcular el punto de intersección entre la recta y el plano.

$$\mathbf{r}: \frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{0}} = \frac{\mathbf{y+1}}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{z-3}}{\mathbf{1}} \ \mathbf{i}\ \boldsymbol{\pi}: \mathbf{x + 2y + mz = 6}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/CMaQOJJvLF0

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta = \left|\frac{\overrightarrow{v_r}.\overrightarrow{n_\pi}}{|\overrightarrow{v_r}|.|\overrightarrow{n_\pi}|}\right| ; \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \left|\frac{(0,1,1).(1,2,m)}{\sqrt{2}.\sqrt{5+m^2}}\right| = \left|\frac{2+m}{\sqrt{10+2m^2}}\right| \rightarrow$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{2+m}{\sqrt{10+2m^2}}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4+4m+m^2}{10+2m^2} \rightarrow m = \frac{1}{4}$$

La recta y el plano se cortan en el punto $\left(1, \frac{16}{9}, \frac{52}{9}\right)$

3. Considera la función f(x) = 2·e$^{-(x-1)}$+ 4x. Calcula los máximos y mínimos relativos dando los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Y demostrar que f(x) es cóncava para todo valor de x.

VER VÍDEO https://youtu.be/laWieVZUSOA

a.

$$f'(x) = -2e^{-x+1} + 4 = 0 \rightarrow 2e^{-x+1} = 4 \rightarrow e^{-x+1} = 2 \rightarrow -x + 1 = \ln 2 \rightarrow$$
$$x = 1 - \ln 2$$

- ∞ DECRECE	1 – ln2 = 0,31	CRECE + ∞
f’(0,2)<0	MÍNIMO EN x = 1 – Ln2	f‘(0,4)>0

b.

$f''(x) = 2e^{-x+1} > 0$ para todo x, concava.

4. Calcula la siguiente integral:

$$\int (\mathbf{x^2 + 1}) \cdot \mathbf{\ln x\, dx}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/c-EqZnhLAyw

$$\int (x^2+1)\cdot \ln x\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} + 1\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} - x + c$$

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x^2 + 1 \rightarrow v = \frac{x^3}{3} + x$$

OPCIÓN B.

1. Sea A la matriz siguiente $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, donde a es un valor real. Calcula A^2, A^3 y A^4 y da una fórmula general para la expresión de A^n.

VER VÍDEO https://youtu.be/bulx-rT42tU

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2a & a^2 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3a^2 & a^3 & 0 \\ 3a & 3a^2 & a^3 \end{pmatrix} A^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 0 & 0 \\ 4a^3 & a^4 & 0 \\ 6a^2 & 4a^3 & a^4 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1} & a^n & 0 \\ \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot a^{n-2} & na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$$

2. Determina m para que la recta r sea paralela a π. Calcular la distancia entre ellos.

$$r: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{m} = \frac{z+3}{3}; \ \pi: x + y - z = 5$$

VER VÍDEO https://youtu.be/77QFJkbpSpU

a. Si el plano es paralelo a la recta, el vector normal del plano es perpendicular al vector director de la recta.

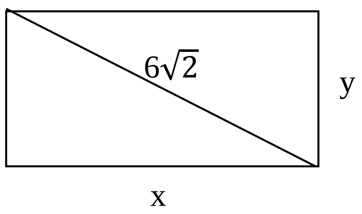
$$v_r \cdot n_\pi = 0 \rightarrow (-1, m, 3) \cdot (1,1,-1) = -1 + m - 3 = 0 \rightarrow m = 4$$

b. La distancia recta plano es la distancia de un punto de la recta al plano.

$$d(r,\pi) = d(R,\pi) = d(R(0,-1,-3), x + y - z - 5 = 0) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}u.$$

3. De todos los rectángulos de diagonal $6\sqrt{2}$, determinar el rectángulo de perímetro máximo.

VER VÍDEO. https://youtu.be/IQfuUZ6nr5U



1. Función a optimizar: $P = 2x + 2y$
2. Relación entre variables: $x^2 + y^2 = (6\sqrt{2})^2 \rightarrow x = \sqrt{72 - y^2}$
3. Sustituir 2 en 1 $P = 2\sqrt{72 - y^2} + 2y$
4. Derivar, igualar a cero y resolver.

$$P' = \cancel{2}\frac{-2y}{\cancel{2}\sqrt{72-y^2}} + 2 = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow x = 6$$

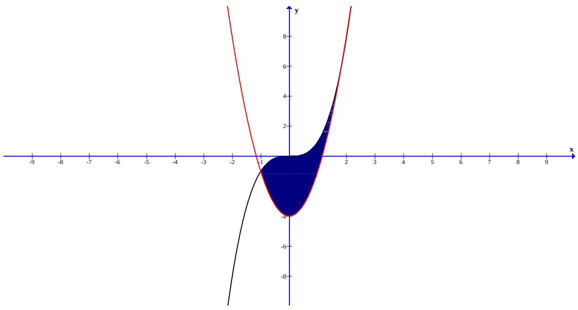
5. Comprobar.

P'(5)>0	6	P'(7)<0

Se confirma un máximo del perímetro.

4. Dibuja el recinto limitado por las curvas f = x^3 y g = $3x^2 - 4$. Calcula el área.

VER VÍDEO https://youtu.be/mQvvWOj9YeQ



$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3x^2 - 4 \end{cases} \rightarrow x^3 = 3x^2 - 4 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{2} x^3 - (3x^2 - 4)dx = 6{,}75\ u^2$$