SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

SELECTIVIDAD. MATEMÁTICAS II. JUNIO 2015. U.I.B.

Opción A.

1. Discutir para qué valores de a el sistema siguiente es compatible y resolverlo en el caso o casos en que sea compatible.

$$\begin{cases} \mathbf{ax+y+z=a^2} \\ \mathbf{x-y+z=1} \\ \mathbf{3x-y-z=1} \\ \mathbf{6x-y+z=3a} \end{cases}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/uuBzK5GFBaw

$$A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{pmatrix};\ |A^*| = -16+16a-4a^2 = 0; a = 2.$$

$\text{Si } a \neq 2 \to |A^*| \neq 0 \to \text{Rango } A^* = 4 \neq \text{Rango } A \to \text{Sistema incompatible.}$

$$\text{Si } a = 2; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \to RA = 3 = RA^* \to S.C.D.$$

$$\text{Tomando las tres primeras ecuaciones: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

2. Estudia la posición relativa de las rectas r y s, y en caso de que se corten halla en qué punto.

$$\mathbf{r}: \frac{\mathbf{x-2}}{\mathbf{-3}} = \frac{\mathbf{y-3}}{\mathbf{5}} = \mathbf{z};\ \mathbf{s}: \begin{cases} \mathbf{x = 1-t} \\ \mathbf{y = 2t} \\ \mathbf{z = 5} \end{cases}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/Laghi1Wwn5Q

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases}x=2-3a\\ y=3+5a\\ z=a\end{cases}\\ s:\begin{cases}x=1-t\\ y=2t\\ z=5\end{cases}\end{array}\right\}\begin{cases}2-3a=1-t\\ 3+5a=2t\\ a=5\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\overbrace{a=5}^{\text{se cortan}}\\ t=14\end{cases}\rightarrow(-13,28,5)$$

3. Determinar los valores de a, b y c para que la función f(x) = $x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el punto (1, 0), tenga un máximo relativo en x = - 1 y un mínimo relativo en x = 0.

VER VÍDEO https://youtu.be/SkclLsirwyI

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c;\ f'(x) = 3x^2 + 2ax + b;\ f''(x) = 6x + 2a$

$$\begin{cases}\text{Pasa por }(1,0)\rightarrow f(1)=0\rightarrow 1+a+b+c=0\\ \text{Máx. rel en }x=-1\rightarrow f'(-1)=0\rightarrow 3-2a+b=0\\ \text{Mín. rel. en }x=0\rightarrow f'(0)=0\rightarrow b=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\ b=0\\ c=\dfrac{-5}{2}\end{cases}$$

$$f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2};f'(x)=3x^2+3x;f''(x)=6x+3\rightarrow\begin{cases}\overbrace{f''(-1)<0}^{\text{confirma un máximo}}\\ \underbrace{f''(0)=0>0}_{\text{confirma un mínimo.}}\end{cases}$$

4. Calcular la siguiente integral.

$$\int\frac{\mathbf{2x+5}}{\mathbf{(x+3)^3}}\mathbf{dx}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/luFa-m0vw0k

$$\int\frac{2x+5}{(x+3)^3}dx=\int\left(\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{(x+3)^3}\right)dx\overset{*}{=}$$
$$=2\int\frac{1}{(x+3)^2}dx-\int\frac{1}{(x+3)^3dx}dx=\frac{-2}{x+3}+\frac{1}{2(x+3)^2}+K$$

$$*\ \frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{(x+3)^3}=\frac{A(x+3)^2+B(x+3)+C}{(x+3)^3}=\frac{2x+5}{(x+3)^3}$$

$$A(x+3)^2+B(x+3)+C=2x+5\rightarrow\begin{cases}\text{para }x=-3:C=-1\\ \text{para }x=0:9A+3B+C=5\\ \text{para }x=1:16A+4B+C=7\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A=0\\ B=2\\ C=-1\end{cases}$$

Opción B.

1. **a. Demostrar que la ecuación matricial A·B – A = C no tiene solución.**

B = $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b. Resolver la ecuación matricial anterior tomando:

B = $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

VER VÍDEO https://youtu.be/H4CvmCjuZTw

a.

$$A\cdot B - A = C \to A\cdot(B-I) = C \to |A\cdot(B-I)| = |C| \to \underbrace{|A|\cdot\overbrace{|B-I|}^{=0} = \overbrace{|C|}^{=-2}}_{\substack{0=-2 \text{ NO ES CORRECTO.} \\ \text{LA ECUACIÓN NO} \\ \text{TIENE SOLUCIÓN.}}}$$

b.

$$A\cdot B - A = C \to A\cdot(B-I) = C \to A = C\cdot(B-I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

2. Halla la ecuación de la recta r que pasa por el punto (1, 0, 2) y es paralela a los planos: x – 2y + 3z +1 = 0 y 2x – 3y + x +6 = 0

VER VÍDEO https://youtu.be/tHZWftCH4iM

Pasa por $(1,0,2) \to \frac{x-1}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z-2}{c}$

Es paralela a $\pi: x - 2y + 3z + 1 = 0 \to \overrightarrow{n_\pi} \perp \overrightarrow{v_r} \to (1,-2,3)\cdot(a,b,c) = 0 \to$

$\to a - 2b + 3c = 0$

Es paralela a $\pi': 2x - 3y + z + 6 = 0 \to \overrightarrow{n_{\pi'}} \perp \overrightarrow{v_r} \to (2,-3,1)\cdot(a,b,c) = 0 \to$

$\to 2a - 3b + c = 0$

$$\begin{cases} a - 2b + 3c = 0 \\ 2a - 3b + c = 0 \end{cases} \to \overrightarrow{v_r} = (7,5,1) \to \frac{x-1}{7} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{1}$$

3. **a) Demostrar que x = 0 es la única solución de la ecuación siguiente: $5x^9 + 3x^5 + 7x = 0$.**

b) Demostrar que x = 0 es la única solución de la ecuación siguiente: $e^x = 1 + x$.

VER VÍDEO https://youtu.be/-WyRIywAviY

a.

$5x^9 + 3x^5 + 7x = 0 \to x \cdot (5x^8 + 3x^4 + 7x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 5x^8 + 3x^4 + 7 = 0 \end{cases}$

$5x^8 + 3x^4 + 7 = 0 \to 5t^2 + 3t + 7 = 0;\ \nexists$ solución real.

b.

$e^x = 1 + x \to e^x - 1 - x = 0 \to f(x) = e^x - 1 - x$

Supongamos que f tiene dos soluciones, $x = 0$ y $x = k$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \text{es continua en } [0,k] \\ f(x) \text{es derivable en } (0,k) \\ f(0) = 0 = f(k) \end{array}\right\} \to \begin{cases} \text{Según el teorema de Rolle.} \\ \exists \alpha \in (0,k) / f'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

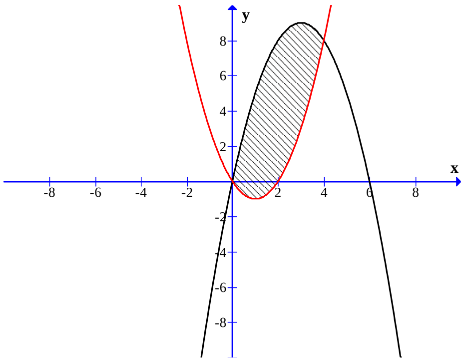
$f'(x) = e^x - 1 = 0 \to e^x = 1 \to x = 0$

Vemos que x =0 es la única solución de f ’(x), por tanto, la existencia de alfa es falsa. Por tanto, la existencia de más de una solución es falsa. X = 0 es, pues, la única solución de la ecuación.

4. Dibuja el recinto limitado por las curvas $y = 6x - x^2$ y $y = x^2 - 2x$. Calcula el área.

VER VÍDEO https://youtu.be/0_axoqVcNwA

Hallamos los puntos de corte: $\begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \to 6x - x^2 = x^2 - 2x \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$



$$A = \int_0^4 6x - x^2 - (x^2 - 2x)\,dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x)dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 4x^2\right]_0^4 = \frac{64}{3}u^2$$