SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

SELECTIVIDAD. MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2015. U.I.B.

OPCIÓN A.

1. Discutir para que valor de a el sistema tiene solución distinta a la trivial.

$$\begin{cases} \mathbf{mx + 2y + z = 0} \\ \mathbf{4x + 2my + mz = 0} \\ \mathbf{2x + (2m-2)y + z = 0} \end{cases}$$

Resolverlo en el caso compatible indeterminado.

VER VÍDEO https://youtu.be/4tLDdvikeLw

Se trata de un sistema 3x3 homogéneo, sus términos independientes son cero.

$$\text{Sistema homogeneo.} \begin{cases} |A| = 0 \rightarrow \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO.} \\ |A| \neq 0 \rightarrow \text{S. C. D.} \rightarrow \text{Solución trivial} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ 4 & 2m & m \\ 2 & 2m-2 & 1 \end{pmatrix};\ |A| = 2m^2 + 4m + 8m - 8 - 4m - 8 - 2m^3 + 2m^2 =$$

$$= -2m^3 + 4m^2 + 8m - 16 = 0 \rightarrow m^3 - 2m^2 - 4m + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$$

Si $m \neq \pm 2$ el determinante de A es distinto de cero, por tanto, el sistema tiene únicamente solución trivial.

Para $m = 2$ o $m = -2$, el sistema tiene infinitas soluciones.

Lo resolvemos para $m = 2$.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 4x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases} \rightarrow 2x + 2y + z = 0 \rightarrow z = -2x - 2y \rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = -2a - 2b \end{cases}$$

2. Determinar los valores de m para que los puntos A (1,2,0), B (0,3,−1), C (1,0,1) y D (−1, 2, m) sean coplanarios y calcular la ecuación general del plano que los contiene.

VER VÍDEO https://youtu.be/7mi_4yJHi_k

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AD} \end{vmatrix} \begin{cases} = 0 \text{ coplanarios.} \\ \neq 0 \text{ no coplanarios.} \end{cases}; \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{vmatrix} = 2m - 2 + 4 = 0 \rightarrow m = -1$$

Si $m \neq -1$ $|A| \neq 0 \longrightarrow$ no son coplanarios. Si $m = -1$, $|A| = 0 \longrightarrow$ son coplanarios.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x - 2 - 2y + 4 - 4z = 0 \rightarrow x - y - 2z + 1 = 0$$

3. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ determinar el valor de c qué verifica que la pendiente de la recta tangente de f(x) en x = c es mínima.

VER VÍDEO https://youtu.be/eFBKqpc2aNA

La pendiente en $x = c$ es $m = f'(c)$

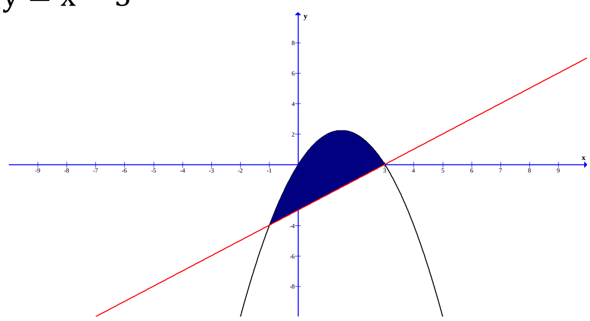
Para que la pendiente sea mínima se debe cumplir $m' = 0$, es decir, $f''(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, y $m' = f''(x) = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow m''(1) = 6 > 0$ confirma un mínimo.

4. Haz un dibujo aproximado de las curvas $y = 3x - x^2$ y $y = x - 3$ indicando los puntos en que se cortan. Calcula el área del recinto limitado por ambas curvas.

VER VÍDEO https://youtu.be/VCqwBG6JZ2U

Resolver el sistema: $\begin{cases} y = 3x - x^2 \\ y = x - 3 \end{cases} \rightarrow 3x - x^2 = x - 3 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$



$$\int_{-1}^{3} [3x - x^2 - (x-3)]dx = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)dx = \frac{32}{3} u^2$$

OPCIÓN B.

1. Calcula la matriz X tal que A·X + B² = A·B. $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

VER VÍDEO https://youtu.be/VEf3s4ymUUI

$AX + B^2 = AB;\ AX = AB - B^2;\ X = A^{-1}\,(AB - B^2)$

$$A = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^{|A| = 2} \to A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \text{ADJ } A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{ADJ } A^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

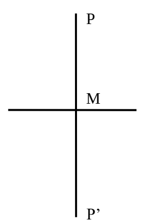
$$AB - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot (AB - B^2) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcular el punto simétrico del punto P (- 3, 1, - 7) respecto de la recta r.

$$\mathbf{x + 1 = \frac{y - 3}{2} = \frac{z + 1}{2}}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/H8w-aMZN7j4



1. Hallamos el plano que contiene a P y es perpendicular a r.

$$\pi: \begin{cases} \text{Pasa por } (-3,1,-7) \\ \perp \text{ a r} \to \vec{v_r} = \vec{n_\pi} = (1,2,2) \end{cases} \to \begin{cases} x + 2y + 2z + D = 0 \\ -3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-7) + D = 0 \to D = 15 \end{cases}$$

$\pi: x + 2y + 2z + 15 = 0$

2. Hallamos el punto M.

$$\begin{cases} r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \\ \pi: x + 2y + 2z + 15 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 + t + 2(3 + 2t) + 2(-1 + 2t) + 15 = 0 \\ -1 + t + 6 + 4t - 2 + 4t + 15 = 0 \\ t = \dfrac{-18}{9} = -2 \rightarrow M = (-3, -1, -5) \end{cases}$$

3. Hallamos P'

$$\frac{P + P'}{2} = M \rightarrow \frac{(-3,1,-7) + (x,y,z)}{2} = (-3,-1,-5) \rightarrow \begin{cases} \dfrac{-3 + x}{2} = -3 \rightarrow x = -3 \\ \dfrac{1 + y}{2} = -1 \rightarrow y = -3 \\ \dfrac{-7 + z}{2} = -5 \rightarrow z = -3 \end{cases}$$

$P' = (-3, -3, -3)$

3. Demostrar que existe un único valor de x > 0 solución de la ecuación $x^2 - e^{-x} = 0$.

VER VÍDEO https://youtu.be/aPo0-yrhNQ4

Sea $f(x) = x^2 - e^{-x}$

x	f(x)
– 1	negativo
0	negativo
1	positivo

$$1. \left.\begin{matrix} f(x) \text{es continua en } [0,1] \\ \text{signo } f(0) \neq \text{signo} f(1) \end{matrix}\right\} \text{Según el T. de Bolzano } \exists c \in (0,1)/f(c) = 0$$

Es decir, c es solución positiva de la ecuación $x^2 - e^{-x} = 0$.

2*. Supongamos que f(x) tiene dos soluciones positivas, c y d.

$$\left.\begin{matrix} f(x) \text{es continua en } [c,d] \\ f(x) \text{es derivable en } (c,d) \\ f(c) = 0 = f(d) \end{matrix}\right\} \text{Según el T. de Rolle } \exists \alpha \in (0,1)/\overbrace{f'(\alpha) = 0}^{**}$$

$$f(x) = x^2 - e^{-x} \rightarrow f'(x) = \overbrace{2x + e^{-x}}^{\substack{\text{Si x>0 esta} \\ \text{expresión es} \\ \text{siempre} \\ \text{positiva.} \\ \text{nunca cero}}} = 0$$, la conclusión ** no es válida, por tanto, la suposición * no es válida.

Del punto 1 se deduce que la ecuación tiene solución. Del punto 2 se deduce que la ecuación no puede tener 2 soluciones. De los puntos 1 y 2 deducimos que si tiene solución y no puede tener 2, entonces tiene solución única.

4. Resolver la siguiente integral.

$$\int \frac{\mathbf{x - 2}}{\mathbf{x^2 + x}} \mathbf{dx}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/G44oll9BVdA

$$\int \frac{x-2}{x^2+x} dx = \int \frac{x-2}{x \cdot (x+1)} dx \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}\right) dx = \int \frac{A(x+1) + Bx}{x^2 + x} dx =$$

$$= -2\int \frac{1}{x}dx + 3\int \frac{1}{x+1}dx = -2\ln|x| + 3\ln|x+1| + c$$

$$x - 2 = A(x+1) + Bx \rightarrow \begin{cases} \text{Si } x = 0 \rightarrow -2 = A \\ \text{Si } x = -1 \rightarrow -3 = -B \rightarrow B = 3 \end{cases}$$