SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

SELECTIVIDAD MATEMÁTICAS II. JULIO 2018. U.I.B.

OPCIÓN A.

1. **a. Discutir para que valores de m el sistema siguiente es compatible:**

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{4x + my + z = m + 2} \\ \mathbf{x + y + mz = -2(m + 1)} \\ \mathbf{4x + y + z = m} \end{aligned}\right\}$$

b. Resolverlo en el caso en que m = 0.

VER VÍDEO https://youtu.be/MUURJXXr114

$$A = \begin{pmatrix} 4 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 4 + 1 + 4m^2 - 4 - m - 4m = 4m^2 - 5m + 1 = 0$$

$$\begin{cases} m = 1 \\ m = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Si } m \neq 1 \text{ y } m \neq \frac{1}{4} \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow RA = RA^* = 3 = \text{nº incognitas} \rightarrow S.C.D.$$

$$\text{Si } m = 1 \begin{cases} A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow RA \geq 2 \\ |A| = 0 \end{cases} \rightarrow RA = 2 \\ A^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow RA^* \geq 2 \\ |A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases} \rightarrow RA^* = 3 \end{cases} \quad S.I.$$

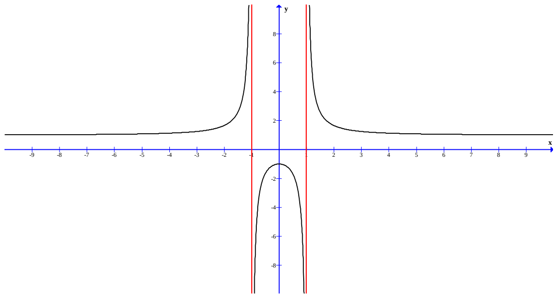
2

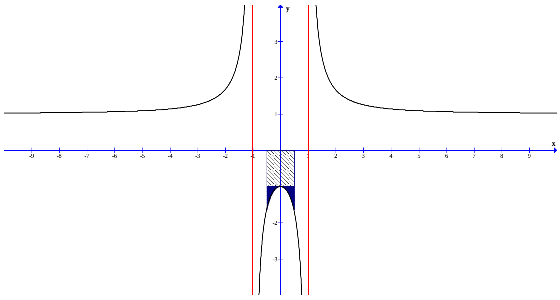
Si m

$$
=\frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}
A=\begin{pmatrix}4 & 1/4 & 1\\ 1 & 1 & 1/4\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}\neq 0\rightarrow RA\geq 2\\ |A|=0\end{array}\right.\rightarrow RA=2\\
A^{*}=\begin{pmatrix}4 & 1/4 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1/4 & -4\\ 4 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}\neq 0\rightarrow RA^{*}\geq 2\\ |A|=0\rightarrow\begin{vmatrix}4 & \frac{1}{4} & 3\\ 1 & 1 & -4\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0\end{array}\right.\rightarrow RA^{*}=3
\end{array}\right. \quad S.I.
$$

$$
\left.\begin{array}{l}4x+z=2\\ x+y=-2\\ 4x+y+z=0\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=-2\\ z=2\end{array}\right.
$$

2. Considerar la función f(x) = $\frac{x^2+1}{x^2-1}$. Hacer un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo [- 1; 1]. Calcular el área limitada per la gráfica de la función anterior, el eje X y las rectas verticales x = ½ y x = - ½.





$$
\int\frac{x^2+1}{x^2-1}dx=\int\left(1+2\frac{1}{x^2-1}\right)dx=x+2\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}\right)dx=
$$

$$
=x+2\left(\frac{-1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx\right)=x-\ln|x+1|+\ln|x-1|+c
$$

$$
\begin{array}{rr|l}
x^2 & +1 & \underline{x^2-1}\\
\underline{-x^2} & \underline{+1} & 1\\
/ & +2 &
\end{array}
$$

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1}\to A(x-1)+B(x+1)=1\begin{cases}A=\frac{-1}{2}\\ B=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2+1}{x^2-1}dx=-1{,}2\to \text{Área}=1{,}2\ u^2$$

3. Determinar los puntos A, B y C de la recta r que están en los planos de coordenadas y determinar cuál de los tres puntos, A, B o C, está situado entre los otros dos.

$$\mathbf{r: x-12=\frac{y+6}{2}=\frac{z-6}{3}}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/H6rl3YdQ4Ro

$$r: x-12=\frac{y+6}{2}=\frac{z-6}{3}\begin{cases}\underbrace{\text{plano XY}(z=0)}_{A(10,-10.0)}\begin{cases}x-12=\frac{0-6}{3}\to x=10\\ \frac{y+6}{2}=\frac{0-6}{3}\to y=-10\end{cases}\\ \underbrace{\text{plano XZ}(y=0)}_{B(15,0,15)}\begin{cases}x-12=\frac{0+6}{2}\to x=15\\ \frac{z-6}{3}=\frac{0+6}{2}\to z=15\end{cases}\\ \underbrace{\text{plano YZ}(x=0)}_{C(0,-30,-30)}\begin{cases}0-12=\frac{y+6}{2}\to y=-30\\ 0-12=\frac{z-6}{3}\to z=-30\end{cases}\end{cases}$$

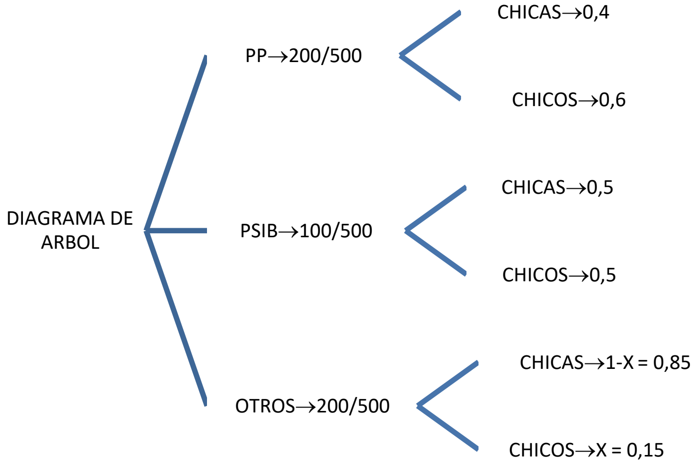
$$\begin{cases}|\overrightarrow{AB}|=|(5,10,15)|=5\sqrt{14}\cong 18{,}7\\ |\overrightarrow{AC}|=|(-10,-20,-30)|=10\sqrt{14}\cong 37{,}42\\ |\overrightarrow{BC}|=|(-15,-30,-45)|=15\sqrt{14}\cong 56{,}12\end{cases}\to \text{B y C son los extremos.}$$

A se encuentra entre ellos

4. Queremos hacer un estudio de las opiniones políticas de los estudiantes de primer curso de la Universidad. Para ello hemos tomado una muestra representativa de 500 estudiantes de primer curso y les hemos preguntado por qué partido político votaron en las últimas elecciones. De los 500 de estudiantes, 200 votaron al PP, 100 al PSIB y el resto a otras formaciones políticas. Sabemos que 200 de los estudiantes eran chicos, que el 40 % de los votantes del PP son chicas y que el 50 % de los votantes del PSIB son chicos. Se pregunta:

a. La probabilidad de que un estudiante haya votado a otras formaciones políticas y sea chica.
b. La probabilidad de que un estudiante chico haya votado al PP.
c. La probabilidad de que un estudiante que ha votado a otras formaciones políticas sea chica.

VER VÍDEO https://youtu.be/wpI3HYHblpk



$$\mathrm{P(CHICO)} = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}\cdot 0{,}6 + \frac{1}{5}\cdot 0{,}5 + \frac{2}{5}\cdot \mathrm{x} \to \mathrm{x} = 0{,}15$$

$$\mathrm{a.\,P(O \cap A)} = \frac{2}{5}\cdot 0{,}85 = 0{,}34$$

$$\mathrm{b.\,P(PP/O)} = \frac{\mathrm{P(PP \cap O)}}{\mathrm{P(O)}} = \frac{\frac{2}{5}\cdot 0{,}6}{\frac{2}{5}} = 0{,}6$$

$$\mathrm{c.\,P(A/OTRAS)} = \frac{\mathrm{P(A \cap OTRAS)}}{\mathrm{P(OTRAS)}} = \frac{\frac{2}{5}\cdot 0{,}85}{\frac{2}{5}} = 0{,}85$$

OPCIÓN B.

1. Considerar las matrices A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$. **Halla la matriz X que verifica: A·X·B = Id**

VER VÍDEO https://youtu.be/yYcn_wSfWIg

$$\mathrm{A\cdot X\cdot B = I \to X} = A^{-1}\cdot I\cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}^{|\mathrm{A}|=1} \to \mathrm{A^t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to \mathrm{ADJ\ A^t} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \mathrm{A^{-1}} = \frac{\mathrm{ADJ\ A^t}}{|\mathrm{A}|} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}^{|B|=1} \to \mathrm{A^t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \mathrm{ADJ\ A^t} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \mathrm{A^{-1}} = \frac{\mathrm{ADJ\ A^t}}{|\mathrm{A}|} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Encontrar los valores a, b y c para que la función $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{ax^2 + bx + 5} & \mathbf{si\ x < 2} \\ \mathbf{cx + 1} & \mathbf{si\ x \geq 2} \end{cases}$

Verifique las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4]. Determinar en qué punto(s) se verifica la tesis que asegura el teorema.

VER VÍDEO https://youtu.be/-9iUJYHu4Nc

Primera hipótesis: continua en $x = 2$

$$\begin{cases} f(2) = 2c + 1 \\ \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} ax^2 + bx + 5 = 4a + 2b + 5 \\ \lim\limits_{x\to 2} cx + 1 = 2c + 1 \end{cases} \end{cases} 2c + 1 = 4a + 2b + 5$$

Segunda hipótesis: derivable en $x = 2$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x < 2 \\ c & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(2^-) = 4a + b \\ f'(2^+) = c \end{cases} 4a + b = c$$

Tercera hipótesis: $f(0) = f(4) \rightarrow 5 = 4c + 1 \rightarrow c = 1$

$a = 1$, $b = -3$, $c = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \rightarrow 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

3. El plano perpendicular al punto medio del segmento de extremos P(0, 3, 8) y Q(2, 1, 6) corta a los ejes de coordenadas en los puntos A, B y C. Halla el área del triángulo ABC.

VER VÍDEO https://youtu.be/xtUSw0VEhtA

$$\pi \begin{cases} \perp \overrightarrow{PQ} = (2, -2, -2) \\ \text{Pasa por } M_{PQ} = (1,2,7) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 2z + D = 0 \\ 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 7 + D = 0 \rightarrow D = 16 \\ \pi\colon 2x - 2y - 2z + 16 = 0 \rightarrow x - y - z = 8 \end{cases}$$

$$\text{Cortes de } \pi \text{ con los ejes.} \begin{cases} \text{eje X: } \begin{pmatrix} y = 0 \\ z = 0 \end{pmatrix} A(8,0,0) \\ \text{eje Y: } \begin{pmatrix} x = 0 \\ z = 0 \end{pmatrix} B(0,-8,0) \\ \text{eje Z: } \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{pmatrix} C(0,0,-8) \end{cases}$$

$$\text{Área ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -8 & -8 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|(64, -64, -64)\right| = 32\sqrt{3}u^2.$$

4. Consideramos la población de estudiantes que han aprobado la selectividad en la convocatoria de junio de un determinado año. Sea X la variable aleatoria que da la proporción de estudiantes de la población anterior que ha elegido estudiar Humanidades. Esta variable aleatoria X sigue una distribución normal de media 0,35 y desviación típica 0,1. Se pregunta. ¿Cuál es la probabilidad de que en un año cualquiera más del 45% de los estudiantes haya iniciado estudios de Humanidades.

$N(0{,}35; 0{,}1)$

$$P(x > 0{,}45) = P\left(z > \frac{0{,}45 - 0{,}35}{0{,}1}\right) = P(z > 1) = 1 - P(z < 1) = 0{,}1587$$